INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG VON

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER
E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XVI. BAND ZWEITES HEFT 1947

SPRINGER-VERLAG · BERLIN UND HEIDELBERG

Preis RM 12.—

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 30—40 Bogen vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel,** Stuttgart S, Alexanderstraße 121

oder an die Herren

Professor Dr. **A. Betz,** Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. **A. Hertwig,** Berlin-Charlottenburg, Technische Universität, Hardenbergstraße 34

Professor Dr.-Ing. **K. Klotter,** Karlsruhe i. B., Technische Hochschule

Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt,** Braunschweig, Harzburger Straße 8 a

Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen,** Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich. Eine Lieferung weiterer Exemplare ist zur Zeit auch gegen Berechnung nicht möglich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24
Fernsprecher 2440

Berlin-Charlottenburg 2
Jebensstraße 1
Fernsprecher 32 20 70

Inhalt:

Seite

Goriupp, Kurt, Die dreiseitig gelagerte Rechteckplatte (I. Mitteilung) 77

Eisenmann, Kurt, Symmetrische Beanspruchung der Walze durch radial wirkende Einzelkräfte *(Berlin, 23. 1. 1883)* 99

Föppl, Otto, Die Dämpfung bei Wechselbeanspruchungen von vorbelasteten Drehstäben *(Leipzig, 6. 4. 1885)* 107

Pflüger, Alfrich, Zum Beulproblem der anisotropen Rechteckplatte *(Hannover, 17. 7. 1912)* 111

Stange, Kurt, Über die Bewegung des stabilen schweren symmetrischen Kreisels bei kleinen Neigungswinkeln seiner Achse *(Erfurt, 6. 6. 1907)* 121

Mettler, Eberhard, Eine Theorie der Stabilität der elastischen Bewegung *(Maulbronn, 19. 7. 1910)* 135

INGENIEUR-ARCHIV

XVI. BAND ZWEITES HEFT 1947

Die dreiseitig gelagerte Reckteckplatte
(I. Mitteilung).

Von **K. Goriupp** in Graz.

1. Einleitung. Die dreiseitig gelagerten Platten kommen in der Praxis des Ingenieurbaues häufig vor, doch wird der Einfluß des dritten Randes mit Rücksicht auf die Einfachheit der Berechnung meist vernachlässigt.

Èstanave[1] hat erstmalig eine Lösung für die dreiseitig gelagerte Platte angegeben. *Nádai*[2] entwickelt die Biegefläche für hydrostatische Druckbelastung, und *Bittner*[3] untersucht die dreiseitig gelagerte Platte mit Randmoment. Schließlich wurde von *Marcus*[4] noch ein Verfahren zur Berechnung von Behälterwandungen mitgeteilt, wobei er die Querkraft am freien Rande nicht in jedem einzelnen Punkt, sondern nur ihre Summe längs des Randes beseitigt. Durch diese Annahme sind die Ergebnisse jedoch gerade für schmale Platten nur wenig befriedigend.

Tölke[5] entwickelt die Biegefläche der allseitig aufliegenden Platte, ausgehend von der Greenschen Funktion, für eine Einzellast.

Zweck dieser Arbeit ist es nun, Lösungen für die dreiseitig gelagerte Platte bei freier Auflagerung oder Einspannung des dritten Randes anzugeben, bei denen die Rechenarbeit in erträglichen Grenzen bleibt. Die Biegefläche wird dabei in Anlehnung an das Verfahren von *Tölke*[5] durch einfache trigonometrische Reihen dargestellt. Diese konvergieren so rasch, daß es gelingt, für Durchbiegung, Momente und Querkräfte geschlossene Formeln aufzustellen.

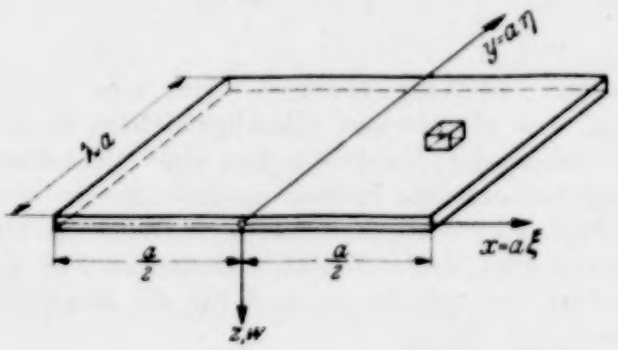


Abb. 1.

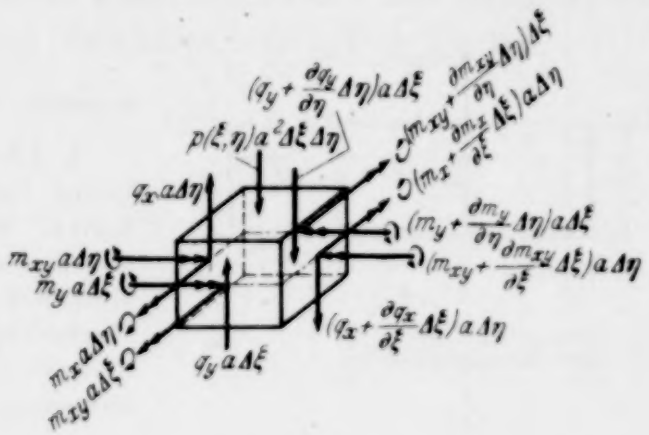


Abb. 2.

2. Die elastischen Grundgleichungen. Die Abb. 1 stellt eine Rechteckplatte von konstanter Stärke h dar. Die Belastung p sei als stetige Funktion der dimensionslosen Veränderlichen

$$\xi = \frac{x}{a}, \qquad \eta = \frac{y}{a} \tag{1}$$

gegeben und wird ebenso wie die Durchbiegung der Platte in der z-Richtung positiv gewertet. Auf einen kleinen Quader, der durch achsenparallele Schnitte aus der Platte herausgelöst wird, wirken unter Zugrundelegung der Navierschen Biegungstheorie die in Abb. 2 eingetragenen Schnittkräfte und Schnittmomente.

---

[1] *Èstanave*, Contribution à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque usw. Diss. Paris 1900.
[2] *A. Nádai*, Die elastischen Platten. Berlin 1925.
[3] *E. Bittner*, Momententafeln und Einflußflächen für kreuzweise bewehrte Eisenbetonplatten. Wien 1938.
[4] *H. Marcus*, Bauing. XVII (1936) S. 40.
[5] *F. Tölke*, Ing.-Arch. 5 (1934) S. 187.

Aus der Betrachtung des Gleichgewichtes folgt in bekannter Weise die Differentialgleichung der Plattenmittelfläche

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2\,\partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} = \frac{p\,a^4}{\overline{E}\,J}\,. \tag{2}$$

wobei

$$\overline{E}\,J = \frac{E}{1-\nu^2}\,\frac{h^3}{12} \tag{3}$$

und ν die Querdehnung des Materials bedeuten. Aus der Durchbiegung w werden die Ausdrücke für Momente und Querkräfte durch mehrmalige Differentiation gewonnen. Die Biegungsmomente lassen sich nach Einführung des Begriffes der Momentensumme

$$M = -\frac{\overline{E}\,J}{a^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right) = \frac{m_x + m_y}{1+\nu} \tag{4}$$

folgendermaßen darstellen:

$$\left.\begin{aligned} m_x &= -\frac{\overline{E}\,J}{a^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right) = -\frac{\overline{E}\,J\,(1-\nu)}{a^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu\,M\,, \\ m_y &= -\frac{\overline{E}\,J}{a^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right) = +\frac{\overline{E}\,J\,(1-\nu)}{a^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + M\,. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Für das Torsionsmoment folgt

$$m_{xy} = -\frac{\overline{E}\,J\,(1-\nu)}{a^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial \xi\,\partial \eta}\,. \tag{6}$$

Die Querkräfte ergeben sich zu

$$\left.\begin{aligned} q_x &= \frac{1}{a}\left(\frac{\partial m_x}{\partial \xi} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial \eta}\right) = \frac{1}{a}\,\frac{\partial M}{\partial \xi}\,, \\ q_y &= \frac{1}{a}\left(\frac{\partial m_{xy}}{\partial \xi} + \frac{\partial m_y}{\partial \eta}\right) = \frac{1}{a}\,\frac{\partial M}{\partial \eta}\,. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Die Auflagerkräfte stellen sich bei freien Rändern als die Summe aus Querkraft und Verwindungsreaktion dar, wobei die letzteren durch

$$\bar{q}_x = \frac{1}{a}\,\frac{\partial m_{xy}}{\partial \eta}\,, \qquad \bar{q}_y = \frac{1}{a}\,\frac{\partial m_{xy}}{\partial \xi} \tag{8}$$

gegeben sind.

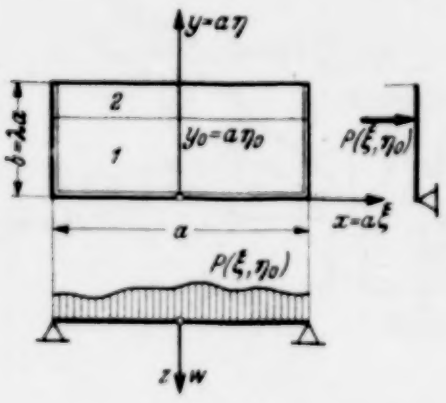


Abb. 3.

3. Lösungsansätze. a) Allgemeines. Um eine allgemeine Darstellung des elastischen Gleichgewichtes zu erhalten, wird die Greensche Funktion für eine Einzellast durch einfache trigonometrische Reihen dargestellt. Es wird zunächst gemäß Abb. 3 eine an drei Rändern frei gelagerte Rechteckplatte betrachtet, die durch eine Linienlast $P(\xi, \eta_0)$ in zwei lastfreie Bereiche zerlegt ist und für die dann die homogene Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2\,\partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} = 0 \tag{9}$$

gilt. Diese wird durch die Lösungsansätze

$$\left.\begin{aligned} w_1(\xi,\eta) &= \sum_1^\infty n\left[A_1\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta + D_1\,n\pi\eta\,\mathfrak{Cos}\,n\pi\eta\right]\sin n\pi\left(\xi+\tfrac{1}{2}\right), \\ w_2(\xi,\eta) &= \sum_1^\infty n\left[A_2\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta + B_2\,\mathfrak{Cos}\,n\pi\eta + C_2\,n\pi\eta\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta + \right. \\ &\qquad \left. + D_2\,n\pi\eta\,\mathfrak{Cos}\,n\pi\eta\right]\sin n\pi\left(\xi+\tfrac{1}{2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

für die Bereiche 1 bzw. 2 befriedigt. Die Randbedingung

$$\text{für } \eta = 0\text{:} \quad w_1 = \frac{\partial^2 w_1}{\partial \eta^2} = 0 \tag{11}$$

ist schon durch den Ansatz erfüllt. Die sechs Konstanten sind also den verbleibenden Randbedingungen

$$\text{für } \eta = \eta_0\text{: } w_1 = w_2,\quad \frac{\partial w_1}{\partial \eta} = \frac{\partial w_2}{\partial \eta},\quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial \eta^2},$$
$$-\frac{\overline{E}J}{a^3}\left[\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial \eta^3} + 2\,\frac{\partial^3 w_1}{\partial \xi^2\,\partial \eta}\right) - \left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial \eta^3} + 2\,\frac{\partial^3 w_2}{\partial \xi^2\,\partial \eta}\right)\right] - P(\xi, \eta_0) = 0, \tag{12}$$

$$\text{für } \eta = \lambda\text{: } \frac{\partial^2 w_2}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial \eta^3} + 2\,\frac{\partial^3 w_2}{\partial \xi^2\,\partial \eta}\right) = 0 \tag{13}$$

anzupassen, woraus sich nach Ausführung der Differentiationen und Zusammenfassung folgende sechs Bestimmungsgleichungen ergeben. Zur Abkürzung wird hierbei $n\pi\eta_0 = \overline{\eta}_0$ und $n\pi\lambda = \overline{\lambda}$ geschrieben.

$$\begin{aligned}
&A_1 \operatorname{Sin}\overline{\eta}_0 + D_1\overline{\eta}_0 \operatorname{Cof}\overline{\eta}_0 - A_2 \operatorname{Sin}\overline{\eta}_0 + B_2 \operatorname{Cof}\overline{\eta}_0 + C_2\overline{\eta}_0 \operatorname{Sin}\overline{\eta}_0 + D_2\overline{\eta}_0 \operatorname{Cof}\overline{\eta}_0,\\
&A_1 \operatorname{Cof}\overline{\eta}_0 + D_1(\operatorname{Cof}\overline{\eta}_0 + \overline{\eta}_0 \operatorname{Sin}\overline{\eta}_0) = A_2 \operatorname{Cof}\overline{\eta}_0 + B_2 \operatorname{Sin}\overline{\eta}_0 + C_2(\operatorname{Sin}\overline{\eta}_0 + \overline{\eta}_0 \operatorname{Cof}\overline{\eta}_0) +\\
&\qquad + D_2(\operatorname{Cof}\overline{\eta}_0 + \overline{\eta}_0 \operatorname{Sin}\overline{\eta}_0),\\
&A_1 \operatorname{Sin}\overline{\eta}_0 + D_1(2\operatorname{Sin}\overline{\eta}_0 + \overline{\eta}_0 \operatorname{Cof}\overline{\eta}_0) = A_2 \operatorname{Sin}\overline{\eta}_0 + B_2 \operatorname{Cof}\overline{\eta}_0 + C_2(2\operatorname{Cof}\overline{\eta}_0 + \overline{\eta}_0 \operatorname{Sin}\overline{\eta}_0) +\\
&\qquad + D_2(2\operatorname{Sin}\overline{\eta}_0 + \eta_0 \operatorname{Cof}\eta_0),\\
&A_2 \operatorname{Sin}\overline{\lambda} + B_2 \operatorname{Cof}\overline{\lambda} + C_2(2\operatorname{Cof}\overline{\lambda} + \overline{\lambda}\operatorname{Sin}\overline{\lambda}) + D_2(2\operatorname{Sin}\overline{\lambda} + \overline{\lambda}\operatorname{Cof}\overline{\lambda}) = 0,\\
&A_2 \operatorname{Cof}\overline{\lambda} - B_2 \operatorname{Sin}\overline{\lambda} + C_2(\operatorname{Sin}\overline{\lambda} - \overline{\lambda}\operatorname{Cof}\overline{\lambda}) + D_2(\operatorname{Cof}\overline{\lambda} - \overline{\lambda}\operatorname{Sin}\overline{\lambda}) = 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

$$-\frac{\overline{E}J}{a^3}\sum_1^\infty{}^n\, 2n^3\pi^3 \sin n\pi\left(\xi + \tfrac{1}{2}\right)\left[D_1 \operatorname{Cof}\overline{\eta}_0 - C_2 \operatorname{Sin}\overline{\eta}_0 - D_2 \operatorname{Cof}\overline{\eta}_0\right] = P(\xi, \eta_0). \tag{15}$$

Drückt man nun in den Gleichungen (14) zunächst alle Konstanten durch D_2 aus, so erhält man

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{D_2}{3\operatorname{Sin}^2\overline{\lambda} + \overline{\eta}_0 \operatorname{Ctg}\eta_0 + 1}\left[\overline{\eta}_0 \operatorname{Ctg}\overline{\eta}_0(3\operatorname{Sin}^2\overline{\lambda} + 1) + \operatorname{Ctg}\overline{\eta}_0(3\operatorname{Sin}\overline{\lambda}\operatorname{Cof}\overline{\lambda} + \overline{\lambda}) -\right.\\
&\qquad \left. - \overline{\eta}_0(3\operatorname{Sin}\overline{\lambda}\operatorname{Cof}\overline{\lambda} + \overline{\lambda}) - (3\operatorname{Sin}^2\overline{\lambda} - \overline{\lambda}^2 - 1)\right],\\
D_1 &= -\frac{D_2}{3\operatorname{Sin}^2\overline{\lambda} + \overline{\eta}_0 \operatorname{Ctg}\overline{\eta}_0 + 1}\left[\overline{\eta}_0 \operatorname{Ctg}\overline{\eta}_0 - \operatorname{Ctg}\overline{\eta}_0(3\operatorname{Sin}\overline{\lambda}\operatorname{Cof}\overline{\lambda} + \overline{\lambda}) + (3\operatorname{Sin}^2\overline{\lambda} + 1)\right],\\
A_2 &= -\frac{D_2}{3\operatorname{Sin}^2\overline{\lambda} + \overline{\eta}_0 \operatorname{Ctg}\overline{\eta}_0 + 1}\left[\overline{\eta}_0 \operatorname{Ctg}\overline{\eta}_0(3\operatorname{Sin}^2\overline{\lambda} + 1) - (3\operatorname{Sin}^2\overline{\lambda} - \overline{\lambda}^2 - 1)\right],\\
B_2 &= -\frac{D_2}{3\operatorname{Sin}^2\overline{\lambda} + \overline{\eta}_0 \operatorname{Ctg}\overline{\eta}_0 + 1}(\overline{\eta}_0 \operatorname{Ctg}\overline{\eta}_0 - 1)(3\operatorname{Sin}\overline{\lambda}\operatorname{Cof}\overline{\lambda} + \overline{\lambda}),\\
C_2 &= -\frac{D_2}{3\operatorname{Sin}^2\overline{\lambda} + \overline{\eta}_0 \operatorname{Ctg}\eta_0 + 1}(3\operatorname{Sin}\overline{\lambda}\operatorname{Cof}\overline{\lambda} + \overline{\lambda}).
\end{aligned} \tag{16}$$

Aus Gleichung (15) ergibt sich mit (16)

$$\overline{E}J\sum_1^\infty{}^n\,\frac{n^3\pi^3}{a^3}\sin n\pi\left(\xi + \tfrac{1}{2}\right)\frac{2D_2}{3\operatorname{Sin}^2\overline{\lambda} + \overline{\eta}_0 \operatorname{Ctg}\overline{\eta}_0 + 1}(\operatorname{Sin}\overline{\eta}_0 - \operatorname{Cof}\overline{\eta}_0 \operatorname{Ctg}\overline{\eta}_0) \times (3\operatorname{Sin}\overline{\lambda}\operatorname{Cof}\overline{\lambda} + \overline{\lambda}) = P(\xi, \eta_0). \tag{17}$$

Die Streifenlast $P(\xi, \eta_0)$ kann immer in der Form

$$P(\xi, \eta_0) = \sum_1^\infty{}^n\, 2\sin n\pi\left(\xi + \tfrac{1}{2}\right)\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} P(\xi, \eta_0)\sin n\pi\left(\xi + \tfrac{1}{2}\right)d\xi \tag{18}$$

dargestellt werden. Durch Einsetzen von (18) in (17) erhält man weiter

$$D_2 = \frac{a^3}{\overline{E}Jn^3\pi^3}\,\frac{(3\operatorname{Sin}^2\overline{\lambda} + \overline{\eta}_0 \operatorname{Ctg}\overline{\eta}_0 + 1)\operatorname{Sin}\overline{\eta}_0}{3\operatorname{Sin}\overline{\lambda}\operatorname{Cof}\overline{\lambda} + \overline{\lambda}}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} P(\xi, \eta_0)\sin n\pi\left(\xi + \tfrac{1}{2}\right)d\xi, \tag{19}$$

wenn noch beachtet wird, daß

$$\operatorname{Sin}\overline{\eta}_0 - \operatorname{Cof}\overline{\eta}_0 \operatorname{Ctg}\overline{\eta}_0 = -\frac{1}{\operatorname{Sin}\overline{\eta}_0}. \tag{20}$$

Vollzieht man nun entsprechend Abb. 4 den Übergang zur Einzellast, so folgt, wenn $P(\xi_0, \eta_0)$ zunächst auf eine Strecke von der Breite $a\,\Delta\xi$ gleichmäßig verteilt wird,

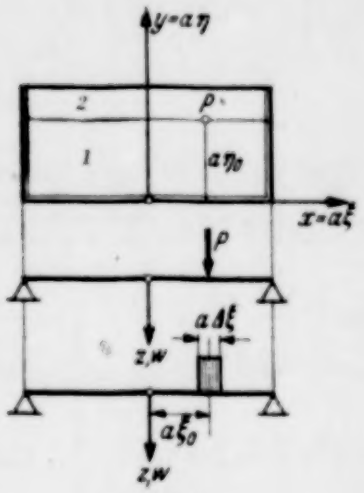


Abb. 4.

$$\left.\begin{aligned} D_2 &= \frac{a^3}{\bar{E}\,J\,n^3\pi^3}\,\frac{(3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}+\bar{\eta}_0\,\mathfrak{Ctg}\,\bar{\eta}_0+1)\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}_0}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda}}\int_{\xi_0-\frac{1}{2}\Delta\xi}^{\xi_0+\frac{1}{2}\Delta\xi}\frac{P}{a\,\Delta\xi}\times\\ &\quad\times\sin n\pi\left(\xi+\tfrac{1}{2}\right)d\,\xi\\ &= \frac{Pa^2}{\bar{E}\,J\,n^3\pi^3}\,\frac{(3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}+\bar{\eta}_0\,\mathfrak{Ctg}\,\bar{\eta}_0+1)\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}_0}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda}}\,\frac{\sin(\frac{1}{2}n\pi\cdot\Delta\xi)}{\frac{1}{2}n\pi\cdot\Delta\xi}\times\\ &\quad\times\sin n\pi\left(\xi_0+\tfrac{1}{2}\right)\end{aligned}\right\}\quad(21)$$

und schließlich für $\Delta\xi\to 0$, wegen $\lim\frac{\sin Z}{Z}=1$

$$D_2 = \frac{Pa^2}{\bar{E}\,J\,n^3\pi^3}\,\frac{(3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}+\bar{\eta}_0\,\mathfrak{Ctg}\,\bar{\eta}_0+1)\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}_0}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda}}\sin n\pi\left(\xi_0+\tfrac{1}{2}\right).\quad(22)$$

Damit ergibt sich für die Durchbiegung:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \sum_1^\infty{}^n\,\frac{Pa^2}{\bar{E}\,J\,n^3\pi^3}\,\frac{\sin n\pi(\xi_0+\frac{1}{2})\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda}}\Big\{\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta\left[\bar{\eta}_0\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}_0(3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}+1)+\right.\\ &\quad+(\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}_0-\bar{\eta}_0\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}_0)(3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda})-(\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}_0(3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}-\bar{\lambda}^2-1)\left.\right]+\\ &\quad+n\pi\eta\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\eta\left[\bar{\eta}_0\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}_0-\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}_0\,(3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda})+\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}_0(3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}+1)\right]\Big\}.\\ w_2 &= \sum_1^\infty{}^n\,\frac{Pa^2}{\bar{E}\,J\,n^3\pi^3}\,\frac{\sin n\pi(\xi_0+\frac{1}{2})\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda}}\Big\{\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta\left[\bar{\eta}_0\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}_0(3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}+1)-\right.\\ &\quad-\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}_0(3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}-\bar{\lambda}^2-1)\left.\right]-\mathfrak{Cof}\,n\pi\eta\left[(\bar{\eta}_0\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}_0-\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}_0)(3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda})\right]-\\ &\quad-n\pi\eta\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta\left[\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}_0(3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda})\right]+n\pi\eta\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\eta\left[\bar{\eta}_0\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}_0+\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}_0(3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}+1)\right]\Big\}.\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

Für die Momentensumme folgt aus Gleichung (10)

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= -\frac{\bar{E}\,J}{a^2}\sum_1^\infty{}^n\,2\,n^2\pi^2\,D_1\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta\,\sin n\pi\left(\xi+\tfrac{1}{2}\right),\\ M_2 &= -\frac{\bar{E}\,J}{a^2}\sum_1^\infty{}^n\,2\,n^2\pi^2\left[C_2\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\eta+D_2\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta\right]\sin n\pi\left(\xi+\tfrac{1}{2}\right)\end{aligned}\right\}\quad(24)$$

und nach Einsetzen der entsprechenden Ausdrücke für die Konstanten

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= -\frac{2\,P}{\pi}\sum_1^\infty{}^n\,\frac{1}{n}\,\frac{\sin n\pi(\xi_0+\frac{1}{2})\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda}}\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta\left[\bar{\eta}_0\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}_0-\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}_0(3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda})+\right.\\ &\quad\left.+\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}_0(3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}+1)\right],\\ M_2 &= -\frac{2\,P}{\pi}\sum_1^\infty{}^n\,\frac{1}{n}\,\frac{\sin n\pi(\xi_0+\frac{1}{2})\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda}}\Big\{-\mathfrak{Cof}\,n\pi\eta\left[\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}_0(3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda})\right]+\\ &\quad+\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta\left[\bar{\eta}_0\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}_0+\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}_0(3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}+1)\right]\Big\}.\end{aligned}\right\}\quad(25)$$

Aus (25) ergeben sich gemäß (7) die Ausdrücke für die Querkraft

$$\left.\begin{aligned} q_{v1} &= -\frac{2\,P}{a}\sum_1^\infty{}^n\,\frac{\sin n\pi(\xi_0+\frac{1}{2})\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda}}\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\eta\left[\bar{\eta}_0\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}_0-\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}_0(3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda})+\right.\\ &\quad\left.+\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}_0(3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}+1)\right],\\ q_{v2} &= -\frac{2\,P}{a}\sum_1^\infty{}^n\,\frac{\sin n\pi(\xi_0+\frac{1}{2})\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda}}\Big\{-\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta\left[\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}_0(3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda})\right]+\\ &\quad+\mathfrak{Cof}\,n\pi\eta\left[\bar{\eta}_0\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}_0+\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}_0(3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}+1)\right]\Big\}.\end{aligned}\right\}\quad(26)$$

Die Gleichungen für q_s ergeben sich unmittelbar aus (25), wenn man dort $\frac{n\pi}{a}\cos n\pi(\xi+\frac{1}{2})$ an Stelle von $\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})$ setzt.

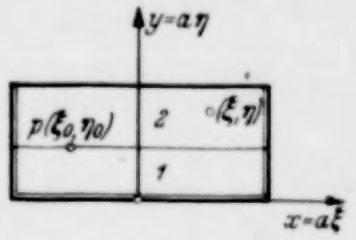


Abb. 5.

Auf Grund der Gleichungen (23) bis (26) lassen sich die Wirkungen einer verteilten Belastung $p(\xi_0, \eta_0)$ an einem beliebigen Punkt (ξ, η) leicht angeben. Man denkt sich hierzu die Belastung $p(\xi_0, \eta_0)$ aus lauter Einzellasten $p\,d\xi_0\,d\eta_0$ zusammengesetzt und die Platte im jeweiligen Angriffspunkt der Last mittels einer Parallelen zur ξ-Achse in zwei lastfreie Bereiche zerlegt (Abb. 5). Die Wirkungen im Punkt (ξ, η) ergeben sich nun für Lasten im Bereiche ($\eta_0=0$ bis $\eta_0=\eta$) aus den Ausdrücken w_2 und M_2, bzw. für Lasten im Bereiche ($\eta_0=\eta$ bis $\eta_0=\lambda$) aus w_1 und M_1. Durch Bildung des Doppelintegrals erhält man somit für die Durchsenkung der Plattenmittelfläche unter einer verteilten Last $p(\xi_0, \eta_0)$

$$w(\xi,\eta)=\sum_1^\infty{}_n \frac{a^4}{\bar{E}J n^3\pi^3}\,\frac{\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda}}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\left[\int_0^\eta f_2\,p(\xi_0,\eta_0)\,d\eta_0+\int_\eta^\lambda f_1\,p(\xi_0,\eta_0)\,d\eta_0\right]\times \\ \times\sin n\pi\left(\xi_0+\frac{1}{2}\right)d\xi_0\,. \tag{27}$$

wobei abkürzend bezeichnet ist

$$f_1=\Big\{\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta\left[\bar{\eta}_0\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}_0(3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}+1)+(\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}_0-\bar{\eta}_0\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}_0)(3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda})-\right. \\ \left.-\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}_0(3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}-\bar{\lambda}^2-1)\right]+n\pi\eta\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\eta\left[\bar{\eta}_0\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}_0-\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}_0(3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}-\bar{\lambda})+\right. \\ \left.+\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}_0(3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}+1)\right]\Big\}, \\ f_2=\Big\{\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta\left[\bar{\eta}_0\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}_0(3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}+1)-\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}_0(3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}-\bar{\lambda}^2-1)\right]-\mathfrak{Cof}\,n\pi\eta\left[(\bar{\eta}_0\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}_0-\right. \\ \left.-\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}_0)(3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda})\right]-n\pi\eta\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta\left[\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}_0(3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda})\right]+ \\ +n\pi\eta\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\eta\left[\bar{\eta}_0\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}_0+\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}_0(3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}+1)\right]\Big\}. \tag{28}$$

Für die Momentensumme folgt

$$M(\xi,\eta)=-\sum_1^\infty{}_n \frac{2a^2}{n\pi}\,\frac{\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda}}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\left[\int_0^\eta g_2\,p(\xi_0,\eta_0)\,d\eta_0+\int_\eta^\lambda g_1\,p(\xi_0,\eta_0)\,d\eta_0\right]\times \\ \times\sin n\pi\left(\xi_0+\frac{1}{2}\right)d\xi_0\,, \tag{29}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde

$$g_1=\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta\left[\bar{\eta}_0\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}_0-\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}_0(3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda})+\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}_0(3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}+1)\right], \\ g_2=\left\{\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta\left[\bar{\eta}_0\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}_0+\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}_0(3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}+1)\right]-\mathfrak{Cof}\,n\pi\eta\left[\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}_0(3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda})\right]\right\}. \tag{30}$$

Die Auswertung der Integrale ist etwas langwierig, bereitet aber keine Schwierigkeiten. Das Problem der freigelagerten Platte ist mit (27) und (29) gelöst. Es werden nun im folgenden einige besondere Lastfälle untersucht und hiefür geschlossene Formeln angegeben.

Der hier gezeigte Rechnungsgang wurde, wie eingangs erwähnt, in Anlehnung an das Verfahren von *Tölke*[1] ermittelt. Es erschien daher zweckmäßig, den allgemeinen Teil dieses Verfahrens hier und im folgenden zu wiederholen.

b) Die frei aufliegende Platte bei konstanter Belastung. In Gleichung (27) treten folgende Integrale auf:

[1] *F. Tölke*, Ing.-Arch. 5 (1934) S. 187.

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{\eta} n\pi\eta_0 \operatorname{Cof} n\pi\eta_0\, d\eta_0 = \frac{1}{n\pi}\,(n\pi\eta \operatorname{Sin} n\pi\eta - \operatorname{Cof} n\pi\eta + 1),\\
&\int_0^{\eta} \operatorname{Sin} n\pi\eta_0\, d\eta_0 = \frac{1}{n\pi}\,(\operatorname{Cof} n\pi\eta - 1),\\
&\int_{\eta}^{\lambda} n\pi\eta_0 \operatorname{Cof} n\pi\eta_0\, d\eta_0 = \frac{1}{n\pi}\,(n\pi\lambda \operatorname{Sin} n\pi\lambda - \operatorname{Cof} n\pi\lambda - n\pi\eta \operatorname{Sin} n\pi\eta + \operatorname{Cof} n\pi\eta),\\
&\int_{\eta}^{\lambda} n\pi\eta_0 \operatorname{Sin} n\pi\eta_0\, d\eta_0 = \frac{1}{n\pi}\,(n\pi\lambda \operatorname{Cof} n\pi\lambda - \operatorname{Sin} n\pi\lambda - n\pi\eta \operatorname{Cof} n\pi\eta + \operatorname{Sin} n\pi\eta),\\
&\int_{\eta}^{\lambda} \operatorname{Cof} n\pi\eta_0\, d\eta_0 = \frac{1}{n\pi}\,(\operatorname{Sin} n\pi\lambda - \operatorname{Sin} n\pi\eta),\\
&\int_{\eta}^{\lambda} \operatorname{Sin} n\pi\eta_0\, d\eta_0 = \frac{1}{n\pi}\,(\operatorname{Cof} n\pi\lambda - \operatorname{Cof} n\pi\eta).
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Die etwas langwierige Vereinfachung der Gleichung (27) nach Einführung der Ausdrücke (31) soll hier im einzelnen nicht wiedergegeben werden. Wird noch beachtet, daß für alle ungeraden n

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sin n\pi\left(\xi_0 + \tfrac{1}{2}\right) d\xi_0 = \frac{2}{n\pi},$$

jedoch für gerade n den Wert Null annimmt, so ergibt sich die Durchbiegung zu

$$\left.\begin{aligned}
w(\xi,\eta) = \frac{4pa^4}{\bar{E}J\pi^5} \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^5} \Big[1 - \operatorname{Cof}\bar{\eta} + \tfrac{1}{2}\bar{\eta}\operatorname{Sin}\bar{\eta} + \frac{1}{3\operatorname{Sin}\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda} + \bar{\lambda}}\,(3\operatorname{Sin}\bar{\eta}\operatorname{Sin}^2\bar{\lambda} -\\
- \tfrac{3}{2}\bar{\eta}\operatorname{Cof}\bar{\eta}\operatorname{Sin}^2\bar{\lambda} - \tfrac{1}{2}\bar{\lambda}^2\operatorname{Sin}\bar{\eta})\Big].
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Für $\bar{\lambda} \to \infty$ geht die dreiseitig gelagerte Platte in den Halbstreifen über, und man erhält unter Beachtung von

$$\lim_{\bar{\lambda}\to\infty} \frac{3\operatorname{Sin}^2\bar{\lambda}}{3\operatorname{Sin}\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda} + \bar{\lambda}} = 1, \qquad \lim_{\bar{\lambda}\to\infty} \frac{\bar{\lambda}^2}{3\operatorname{Sin}\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda} + \bar{\lambda}} = 0 \tag{33}$$

für die Durchbiegung den Ausdruck

$$w(\xi,\eta) = \frac{4pa^4}{\bar{E}J\pi^5} \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^5} \Big[1 + \operatorname{Sin}\bar{\eta} - \operatorname{Cof}\bar{\eta} + \tfrac{1}{2}\bar{\eta}(\operatorname{Sin}\bar{\eta} - \operatorname{Cof}\bar{\eta})\Big], \tag{34}$$

der sich mit Hilfe der Beziehung

$$\operatorname{Sin}\bar{\eta} - \operatorname{Cof}\bar{\eta} = -e^{-\bar{\eta}} \tag{35}$$

in die bekannte Lösung von *Nádai*[1]

$$\underset{\bar{\lambda}\to\infty}{w(\xi,\eta)} = \frac{4pa^4}{\bar{E}J\pi^5} \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^5} \left[1 - \left(1 + \frac{n\pi\eta}{2}\right) e^{-n\pi\eta}\right] \tag{36}$$

umschreiben läßt.

Verwendet man in Gleichung (32) für das erste Glied der eckigen Klammer die Fourier-Entwicklung

$$\sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^5} = \frac{\pi^5}{1536}\,(1 - 4\xi^2)(5 - 4\xi^2), \tag{37}$$

so erhält man die besser konvergente Lösung

$$\left.\begin{aligned}
w(\xi,\eta) = \frac{pa^4}{\bar{E}J}\Big\{\frac{(1-4\xi^2)(5-4\xi^2)}{384} - \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{4\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^5\pi^5}\Big[\operatorname{Cof}\bar{\eta} - \tfrac{1}{2}\bar{\eta}\operatorname{Sin}\bar{\eta} -\\
- \frac{1}{3\operatorname{Sin}\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda} + \bar{\lambda}}\,(3\operatorname{Sin}\bar{\eta}\operatorname{Sin}^2\bar{\lambda} - \tfrac{3}{2}\bar{\eta}\operatorname{Cof}\bar{\eta}\operatorname{Sin}^2\bar{\lambda} - \tfrac{1}{2}\bar{\lambda}^2\operatorname{Sin}\bar{\eta})\Big]\Big\}.
\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

[1] *Nádai*. Die elastischen Platten. Berlin 1925.

Die Momentensumme ergibt sich zu

$$M(\xi,\eta) = p a^2 \left[\frac{1-4\xi^2}{8} - \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{4 \sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^3\pi^3}\left(\mathfrak{Cof}\,\overline{\eta} - \frac{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\eta}\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}}{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}}\right)\right]. \tag{39}$$

Aus (38) und (39) folgen mit (5) die Biegungsmomente

$$\left.\begin{aligned} m_x = p a^2 \Bigg\{ &\frac{1-4\xi^2}{8} - \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{4 \sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^3\pi^3}\Bigg[\mathfrak{Cof}\,\overline{\eta} - (1-\nu)\,\tfrac{1}{2}\,\overline{\eta}\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\eta} + \\ &+ \frac{(1-\nu)}{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}}\left(\tfrac{3}{2}\,\overline{\eta}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\eta}\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda} + \tfrac{1}{2}\,\overline{\lambda}^2\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\eta}\right) - \frac{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\eta}\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}}{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}}\Bigg]\Bigg\}, \\ m_y = p a^2 \Bigg\{ &\frac{(1-4\xi^2)\nu}{8} - \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{4 \sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^3\pi^3}\Bigg[\nu\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\eta} + (1-\nu)\,\tfrac{1}{2}\,\overline{\eta}\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\eta} - \\ &- \frac{(1-\nu)}{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}}\left(\tfrac{3}{2}\,\overline{\eta}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\eta}\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda} + \tfrac{1}{2}\,\overline{\lambda}^2\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\eta}\right) - \nu\,\frac{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\eta}\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}}{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}}\Bigg]\Bigg\}. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Für die Größtwerte der Durchbiegung und des Biegungsmomentes erhält man

$$\left.\begin{aligned} \max w\,(0,\lambda) &= \frac{p a^4}{E J}\left[\frac{5}{384} - \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{4}{n^5\pi^5}\sin\frac{n\pi}{2}\,\frac{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}}{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}}\right], \\ \max m_x(0,\lambda) &= p a^2\left[\frac{1}{8} - \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{4}{n^3\pi^3}\sin\frac{n\pi}{2}\,\frac{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}}{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Dabei fallen die Glieder mit ν heraus, da die Querdehnung am Rand keinen Einfluß hat. Mit (7) ergibt sich aus (39)

$$\left.\begin{aligned} q_x &= -\,p a\left[\xi + \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{4\cos n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^2\pi^2}\left(\mathfrak{Cof}\,\overline{\eta} - \frac{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\eta}\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}}{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}}\right)\right], \\ q_y &= -\,p a \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{4\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^2\pi^2}\left(\mathfrak{Sin}\,\overline{\eta} - \frac{3\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\eta}\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}}{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}}\right) \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

und entlang der Randlinien

$$\left.\begin{aligned} q_x(\pm\tfrac{1}{2},\eta) &= \mp\,p a\left[\frac{1}{2} - \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{4}{n^2\pi^2}\left(\mathfrak{Cof}\,\overline{\eta} - \frac{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\eta}\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}}{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}}\right)\right], \\ q_y\,(\xi,0) &= +\,p a \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{4\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^2\pi^2}\,\frac{3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}}{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}}. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

In den Ecken $(\pm\frac{1}{2}, 0)$ ist die Querkraft null. Für das Torsionsmoment erhält man mit Hilfe von (6) aus (38)

$$\left.\begin{aligned} m_{xy} = p a^2(1-\nu)\sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{2\cos n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^3\pi^3}\Bigg[&\mathfrak{Sin}\,\overline{\eta} - \overline{\eta}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\eta} - \frac{1}{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}}\times \\ &\times\left[\mathfrak{Cof}\,\overline{\eta}\,(3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda} - \overline{\lambda}^2) - 3\,\overline{\eta}\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\eta}\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}\right]\Bigg] \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

und für die Verwindungsreaktionen nach (8) aus (44)

$$\left.\begin{aligned} \overline{q}_x(\pm\tfrac{1}{2},\eta) &= \pm\,p a(1-\nu)\sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{2}{n^2\pi^2}\left[\overline{\eta}\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\eta} - \frac{1}{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}}\,(3\,\overline{\eta}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\eta}\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda} + \overline{\lambda}^2\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\eta})\right], \\ \overline{q}_y\,(\xi,0) &= +\,p a(1-\nu)\sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{2\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^2\pi^2}\,\frac{2\,\mathfrak{Sin}^2\lambda - \overline{\lambda}^2}{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}}. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

In allen Ecken ist die Verwindungsreaktion null. Aus Überlagerung von (43) und (45) folgen die Auflagerkräfte. Da das Torsionsmoment in den Ecken nicht verschwindet, entstehen dort lotrechte Einzelkräfte im doppelten Wert des Torsionsmomentes:

$$A^e = 2\,m_{xy}^e. \tag{46}$$

Die Torsionsmomente in den Ecken folgen aus (44) zu

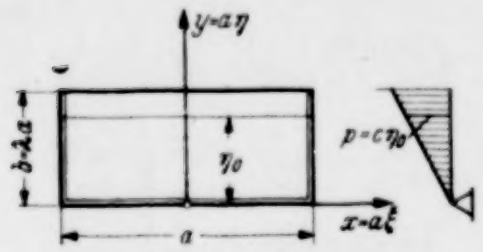


Abb. 6.

$$\left.\begin{aligned} m_{xy}\left(\pm\tfrac{1}{2},0\right) &= \pm p a^2 (1-\nu) \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{2}{n^3\pi^3} \frac{3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda} - \bar{\lambda}^2}{3\,\mathfrak{Sin}\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\bar{\lambda} + \bar{\lambda}}, \\ m_{xy}\left(\pm\tfrac{1}{2},\lambda\right) &= \pm p a^2 (1-\nu) \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{4}{n^3\pi^3} \frac{\bar{\lambda}\,\mathfrak{Sin}\bar{\lambda}}{3\,\mathfrak{Sin}\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\bar{\lambda} + \bar{\lambda}}. \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

In den Ecken $(\pm\frac{1}{2},0)$ treten außerdem noch negative Einspannmomente auf, die wegen des Verschwindens der Randmomente in die 45°-Richtung fallen und dem Torsionsmoment gleich sind.

c) Die frei aufliegende Platte mit Dreieckslast. Mit den in Abb. 6 eingeführten Bezeichnungen ergibt sich

$$p = c\,\eta_0. \quad (48)$$

Dieser Ausdruck ist in Gleichung (27) einzuführen, wobei folgende Integrale auftreten:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\eta} n\pi\eta_0^2\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\eta_0\,d\eta_0 = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\eta}\bar{\eta}_0^2\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}_0^2\,d\eta_0 = \frac{1}{n^2\pi^2}\left[(n\pi\eta)^2\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta - 2n\pi\eta\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\eta + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + 2\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta\right], \\ &\int_0^{\eta}\eta_0\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta_0\,d\eta_0 = \frac{1}{n^2\pi^2}\left(n\pi\eta\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\eta - \mathfrak{Sin}\,n\pi\eta\right), \\ &\int_0^{\eta}\eta_0\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\eta_0\,d\eta_0 = \frac{1}{n^2\pi^2}\left(n\pi\eta\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta - \mathfrak{Cof}\,n\pi\eta + 1\right), \\ &\int_{\eta}^{\lambda} n\pi\eta_0^2\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\eta_0\,d\eta_0 = \frac{1}{n^2\pi^2}\left[(n\pi\lambda)^2\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\lambda - 2n\pi\lambda\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\lambda + 2\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\lambda - \right. \\ &\qquad\qquad \left. - (n\pi\eta)^2\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta + 2n\pi\eta\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\eta - 2\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta\right], \\ &\int_{\eta}^{\lambda}\eta_0\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\eta_0\,d\eta_0 = \frac{1}{n^2\pi^2}\left(n\pi\lambda\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\lambda - \mathfrak{Cof}\,n\pi\lambda - n\pi\eta\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta + \mathfrak{Cof}\,n\pi\eta\right), \\ &\int_{\eta}^{\lambda} n\pi\eta_0^2\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta_0\,d\eta_0 = \frac{1}{n^2\pi^2}\left[(n\pi\lambda)^2\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\lambda - 2n\pi\lambda\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\lambda + 2\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\lambda - \right. \\ &\qquad\qquad \left. - (n\pi\eta)^2\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\eta + 2n\pi\eta\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta - 2\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\eta\right], \\ &\int_{\eta}^{\lambda}\eta_0\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta_0\,d\eta_0 = \frac{1}{n^2\pi^2}\left(n\pi\lambda\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\lambda - \mathfrak{Sin}\,n\pi\lambda - n\pi\eta\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\eta + \mathfrak{Sin}\,n\pi\eta\right). \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

Nach Einsetzen von (49) in (27) und Zusammenfassung erhält man

$$w(\xi,\eta) = \frac{4ca^4}{\bar{E}J\pi^6}\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{\sin n\pi\left(\xi+\frac{1}{2}\right)}{n^6}\left[\bar{\eta} + \frac{2}{3\,\mathfrak{Sin}\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\bar{\lambda} + \bar{\lambda}}\left(\bar{\eta}\,\mathfrak{Cof}\bar{\eta}\,\mathfrak{Sin}\bar{\lambda} - \bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\bar{\lambda}\,\mathfrak{Sin}\bar{\eta} - \right.\right. \\ \left.\left. - 2\,\mathfrak{Sin}\bar{\eta}\,\mathfrak{Sin}\bar{\lambda}\right)\right]. \quad (50)$$

Läßt man $\lambda\to\infty$ gehen und beachtet, daß

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\bar{\lambda}}{3\,\mathfrak{Sin}\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\bar{\lambda} + \bar{\lambda}} = 0, \qquad \lim_{\lambda\to\infty}\frac{\mathfrak{Sin}\bar{\lambda}}{3\,\mathfrak{Sin}\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\bar{\lambda} + \bar{\lambda}} = 0 \quad (51)$$

ist, so erhält man die Gleichung für den Halbstreifen unter steigender Belastung

$$w(\xi,\eta) = \frac{4ca^4}{\bar{E}J\pi^5}\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{\eta\sin n\pi\left(\xi+\frac{1}{2}\right)}{n^5} = \frac{a^4\cdot c}{\bar{E}J}\,\frac{\eta(1-4\xi^2)(5-4\xi^2)}{384}. \quad (52)$$

Im Halbstreifen nimmt die Durchbiegung in der η-Richtung geradlinig zu, die Momente m_y entstehen nur aus der Querdehnung des Materials. Die Momente m_x sind bei Vernachlässigung der Querdehnung identisch mit den Balkenmomenten. Momentensumme und Biegungsmomente ergeben sich zu

$$M(\xi,\eta) = \frac{4ca^2}{\pi^4}\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{\sin n\pi\left(\xi+\frac{1}{2}\right)}{n^4}\left[\bar{\eta} - \frac{4\,\mathfrak{Sin}\bar{\eta}\,\mathfrak{Sin}\bar{\lambda}}{3\,\mathfrak{Sin}\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\bar{\lambda} + \bar{\lambda}}\right], \quad (53)$$

$$\left.\begin{aligned} m_x &= \frac{4\,c\,a^2}{\pi^4}\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^4}\left[\bar\eta+\frac{2(1-\nu)}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda+\bar\lambda}(\bar\eta\,\mathfrak{Cof}\,\bar\eta\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda-\bar\lambda\,\mathfrak{Sin}\,\bar\eta\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda)-\right.\right.\\ &\qquad\left.\left.-\frac{4\,\mathfrak{Sin}\,\bar\eta\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda+\bar\lambda}\right],\\ m_y &= \frac{4\,c\,a^2}{\pi^4}\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^4}\left[\nu\,\bar\eta-\frac{2(1-\nu)}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda+\bar\lambda}(\bar\eta\,\mathfrak{Cof}\,\bar\eta\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda-\bar\lambda\,\mathfrak{Sin}\,\bar\eta\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda)-\right.\\ &\qquad\left.-\nu\,\frac{4\,\mathfrak{Sin}\,\bar\eta\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda+\bar\lambda}\right]. \end{aligned}\right\}\qquad(54)$$

Für die Größtwerte der Durchbiegung und des Biegungsmomentes folgt

$$\left.\begin{aligned} \max w\,(0,\lambda) &= \frac{c\,a^4}{\bar E\,J}\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{4\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^6\pi^6}\left[\bar\lambda-\frac{4\,\mathfrak{Sin}^2\bar\lambda}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda+\bar\lambda}\right],\\ \max m_x(0,\lambda) &= c\,a^2\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{4\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^4\pi^4}\left[\bar\lambda-\frac{4\,\mathfrak{Sin}^2\bar\lambda}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda+\bar\lambda}\right]. \end{aligned}\right\}\qquad(55)$$

Die Querkräfte ergeben sich zu

$$\left.\begin{aligned} q_x &= c\,a\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{4\cos n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^3\pi^3}\left[\bar\eta-\frac{4\,\mathfrak{Sin}\,\bar\eta\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda+\bar\lambda}\right],\\ q_y &= c\,a\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{4\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^3\pi^3}\left[1-\frac{4\,\mathfrak{Cof}\,\bar\eta\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda+\bar\lambda}\right]. \end{aligned}\right\}\qquad(56)$$

wobei sich q_y unter Benutzung der Fourier-Entwicklung

$$\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^3\pi^3}=\frac{1}{32}(1-4\,\xi^2)\qquad(57)$$

in die besser konvergente Form

$$q_y=c\,a\left[\frac{1}{8}(1-4\,\xi^2)-\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{4\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^3\pi^3}\,\frac{4\,\mathfrak{Cof}\,\bar\eta\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda+\bar\lambda}\right]\qquad(58)$$

umschreiben läßt. Entlang der Randlinien bekommt man

$$\left.\begin{aligned} q_x(\pm\tfrac{1}{2},\eta) &= \mp\,c\,a\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{4}{n^3\pi^3}\left[\bar\eta-\frac{4\,\mathfrak{Sin}\,\bar\eta\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda+\bar\lambda}\right],\\ q_y\,(\xi,0) &= +\,c\,a\left\{\frac{1}{8}(1-4\,\xi^2)-\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{4\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^3\pi^3}\,\frac{4\,\mathfrak{Cof}\,\bar\eta\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda+\bar\lambda}\right\}. \end{aligned}\right\}\qquad(59)$$

In den Ecken $(\pm\frac{1}{2},0)$ ist die Querkraft null. Für das Torsionsmoment erhält man

$$m_{xy}=-\,c\,a^2\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{4\cos n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^4\pi^4}\left\{1+\frac{2}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda+\bar\lambda}\left[\bar\eta\,\mathfrak{Sin}\,\bar\eta\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda-\mathfrak{Cof}\,\bar\eta\,(\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda+\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda)\right]\right\}(1-\nu).\qquad(60)$$

Unter Benutzung der Fourier-Entwicklung

$$\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{\cos n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^4\pi^4}=\frac{\xi}{96}(4\,\xi^2-3)\qquad\text{für}\quad-\tfrac{1}{2}\leqq\xi\leqq+\tfrac{1}{2}\qquad(61)$$

läßt sich (60) umformen in

$$m_{xy}=-\,c\,a^2\left[\frac{\xi}{24}(4\,\xi^2-3)+\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{8\cos n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^4\pi^4}\,\frac{\bar\eta\,\mathfrak{Sin}\,\bar\eta\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda-\mathfrak{Cof}\,\bar\eta\,(\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda+\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda)}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda+\bar\lambda}\right](1-\nu),\qquad(62)$$

und man bekommt die Verwindungsreaktion zu

$$\left.\begin{aligned}\bar{q}_v\left(\pm\tfrac{1}{2},\eta\right) &= \pm c\,a\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{8}{n^3\pi^3}\,\frac{\bar{\eta}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}-\bar{\lambda}\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda}}\,(1-\nu)\,.\\ \bar{q}_v\,(\xi,0) &= +c\,a\left[\frac{1}{8}\,(1-4\,\xi^2)-\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{8\sin n\pi\left(\xi+\frac{1}{2}\right)}{n^3\pi^3}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda}}\right](1-\nu)\,.\end{aligned}\right\}\qquad(63)$$

In allen Ecken ist die Verwindungsreaktion wieder null. Die Auflagerkräfte gewinnt man durch Überlagerung von (56) und (63) bzw. (58) und (63). Die lotrechten Auflagerkräfte in den Ecken haben den doppelten Wert der dort auftretenden Torsionsmomente:

$$\left.\begin{aligned}m_{xy}\left(\pm\tfrac{1}{2},0\right) &= \pm c\,a^2\left[\frac{1}{24}-\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{8}{n^4\pi^4}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda}}\right](1-\nu)\,.\\ m_{xy}\left(\pm\tfrac{1}{2},\lambda\right) &= \pm c\,a^2\left[\frac{1}{24}-\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{8}{n^4\pi^4}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda}}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda}}\right](1-\nu)\,.\end{aligned}\right\}\qquad(64)$$

Hat die Belastung die in Abb. 7 gezeigte Form

$$p = c\,(\lambda a-\eta_0)\,.\qquad(65)$$

so ergeben sich die Schnittkräfte aus Überlagerung der oben gewonnenen Formeln mit denen des Abschnittes b).

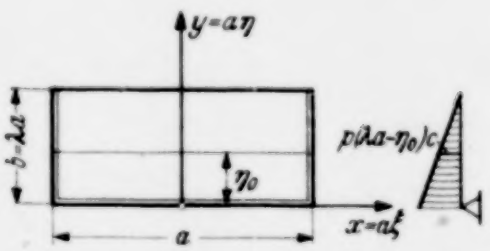


Abb. 7.

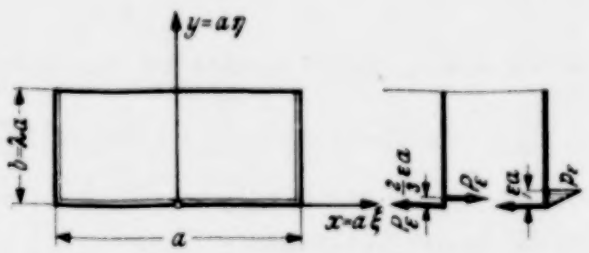


Abb. 8.

d) Gegenüber liegende Ränder frei aufliegend, dritter Rand eingespannt, gleichmäßige Belastung. Eine Einspannung des Randes $(\xi,0)$ kann man sich durch eine zusätzliche Belastung der Randlinie entsprechend Abb. 8 hergestellt denken. Nimmt man diese Belastung zunächst auf die Breite εa dreieckförmig verteilt an, so entfällt bei einer Spitzenlast $p_t(\xi)$, auf die Längeneinheit die Gesamtlast

$$P_t\,(\xi) = \frac{1}{2}\,\varepsilon\,a\,p_t\,(\xi)$$

mit einem Moment

$$M_t\,(\xi) = \frac{1}{3}\,\varepsilon^2 a^2 p_t\,(\xi)$$

in bezug auf die Randlinie. Denkt man sich nun ε veränderlich und das Moment M festgehalten, so folgt für die Randlinie

$$p_t\,(\xi) = \frac{3}{\varepsilon^2 a^2}\,M\,(\xi,0)$$

und damit für die veränderliche Belastungsintensität

$$p\,(\xi_0,\eta_0) = \frac{3}{\varepsilon^2 a^2}\,\frac{\eta_0}{\varepsilon}\,M\,(\xi,0)\,.\qquad(66)$$

Wird (66) in (27) eingeführt und ein Punkt (ξ,η) der lastfreien Innenzone betrachtet, so ergibt sich

$$w\,(\xi,\eta) = \sum_{1}^{\infty n}\frac{a^4}{\bar{E}\,J\,n^3\pi^3}\,\frac{\sin n\pi\left(\xi+\frac{1}{2}\right)}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda}}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\sin n\pi\left(\xi_0+\tfrac{1}{2}\right)d\,\xi_0\int_0^{\eta}\int_2\frac{3\,\eta_0}{\varepsilon^3 a^2}\,M\,(\xi_0,0)\,d\,\eta_0.\qquad(67)$$

Setzt man ε als genügend klein voraus ($\lim \varepsilon = 0$), so kann man für $\mathfrak{Sin}\,\varepsilon$ das Argument und für $\mathfrak{Cof}\,\varepsilon$ die Einheit schreiben, wodurch (28) folgende Form annimmt:

$$f_2 = \bar{\eta}_0 \left[\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}\,(\bar{\lambda}^2 + 2) - \bar{\eta}\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}\,(3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda} + \bar{\lambda}) + \bar{\eta}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}\,(3\,\mathfrak{Sin}^2\,\bar{\lambda} + 2)\right], \tag{68}$$

und man erhält nach Ausführung der Integration in (67)

$$w(\xi, \eta) = \sum_1^\infty{}^n \frac{a^2}{\bar{E}\,J\,n^2\pi^2} \frac{\sin n\pi\,(\xi + \tfrac{1}{2})}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda} + \bar{\lambda}}\, h_2 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} M(\xi_0, 0) \sin n\pi\,(\xi_0 + \tfrac{1}{2})\, d\xi_0, \tag{69}$$

wobei abkürzend bezeichnet ist

$$h_2 = \left[\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}\,(\bar{\lambda}^2 + 2) - \bar{\eta}\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}\,(3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda} + \bar{\lambda}) + \bar{\eta}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}\,(3\,\mathfrak{Sin}^2\,\bar{\lambda} + 2)\right]. \tag{70}$$

Durch Überlagerung von (27) und (69) folgt nun die Durchsenkung der Plattenmittelfläche

$$\left.\begin{aligned} w(\xi, \eta) = {} & \sum_1^\infty{}^n \frac{a^4}{\bar{E}\,J\,n^3\pi^3} \frac{\sin n\pi\,(\xi + \tfrac{1}{2})}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda} + \bar{\lambda}} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left[\int_0^\eta f_2 p(\xi_0, \eta_0)\, d\eta_0 + \int_\eta^\lambda f_1\, p(\xi_0, \eta_0)\, d\eta_0 \right] \sin n\pi\,(\xi_0 + \tfrac{1}{2})\, d\xi_0 + \\ & + \sum_1^\infty{}^n \frac{a^2}{\bar{E}\,J\,n^2\pi^2} \frac{\sin n\pi\,(\xi + \tfrac{1}{2})}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda} + \bar{\lambda}}\, h_2 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} M(\xi_0, 0) \sin n\pi\,(\xi_0 + \tfrac{1}{2})\, d\xi_0. \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Die erste Reihe von (71) geht für konstante Belastung über in (32), und man erhält weiter nach Einsetzen von (70) in die zweite Reihe

$$\left.\begin{aligned} w(\xi, \eta) = {} & \sum_{1,3,5}^\infty{}^n \frac{4\,p\,a^4}{\bar{E}\,J\,n^5\pi^5} \sin n\pi\,(\xi + \tfrac{1}{2}) \left[1 - \mathfrak{Cof}\,\bar{\eta} + \tfrac{1}{2}\,\bar{\eta}\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta} + \frac{1}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda} + \bar{\lambda}} \left(3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}\,\mathfrak{Sin}^2\,\bar{\lambda} - \right.\right. \\ & \left.\left. - \tfrac{3}{2}\,\bar{\eta}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}\,\mathfrak{Sin}^2\,\bar{\lambda} - \tfrac{1}{2}\,\bar{\lambda}^2\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta} \right) \right] + \sum_1^\infty{}^n \frac{a^2}{\bar{E}\,J\,n^2\pi^2} \frac{\sin n\pi\,(\xi + \tfrac{1}{2})}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda} + \bar{\lambda}} \left[\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}\,(\bar{\lambda}^2 + 2) - \right. \\ & \left. - \bar{\eta}\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}\,(3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda} + \bar{\lambda}) + \bar{\eta}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}\,(3\,\mathfrak{Sin}^2\,\bar{\lambda} + 2) \right] \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} M(\xi_0, 0) \sin n\pi\,(\xi_0 + \tfrac{1}{2})\, d\xi_0. \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

Bei starrer Einspannung muß die Ableitung nach η längs der Randlinie $(\xi, 0)$ verschwinden. Die Ableitung $\frac{\partial w}{\partial \eta}$ hat die Form

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \eta} = {} & \sum_{1,3,5}^\infty{}^n \frac{2\,p\,a^4}{\bar{E}\,J\,n^4\pi^4} \sin n\pi\,(\xi + \tfrac{1}{2}) \left[-\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta} + \bar{\eta}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta} + \frac{1}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda} + \bar{\lambda}} (3\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}\,\mathfrak{Sin}^2\,\bar{\lambda} - \right. \\ & \left. - 3\,\bar{\eta}\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}\,\mathfrak{Sin}^2\,\bar{\lambda} - \bar{\lambda}^2\,\mathfrak{Cof}\,\eta) \right] + \sum_1^\infty{}^n \frac{a^2}{\bar{E}\,J\,n\pi} \frac{\sin n\pi\,(\xi + \tfrac{1}{2})}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda} + \bar{\lambda}} \left[\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}\,(3\,\mathfrak{Sin}^2\,\bar{\lambda} + \bar{\lambda}^2 + 4) - \right. \\ & \left. - (\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta} + \bar{\eta}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta})\,(3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda} + \bar{\lambda}) + \bar{\eta}\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}\,(3\,\mathfrak{Sin}^2\,\bar{\lambda} + 2) \right] \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} M(\xi_0, 0) \sin n\pi\,(\xi_0 + \tfrac{1}{2})\, d\xi_0. \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

und damit kommt

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \eta}(\xi, 0) = 0 = {} & \sum_{1,3,5}^\infty{}^n \frac{2\,p\,a^4}{\bar{E}\,J\,n^4\pi^4} \frac{\sin n\pi\,(\xi + \tfrac{1}{2})}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda} + \bar{\lambda}} (3\,\mathfrak{Sin}^2\,\bar{\lambda} - \bar{\lambda}^2) + \sum_{1,3,5}^\infty{}^n \frac{a^2}{\bar{E}\,J\,n\pi} \times \\ & \times \frac{\sin n\pi\,(\xi + \tfrac{1}{2})}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda} + \bar{\lambda}} (3\,\mathfrak{Sin}^2\,\bar{\lambda} + \bar{\lambda}^2 + 4) \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} M(\xi_0, 0) \sin n\pi\,(\xi_0 + \tfrac{1}{2})\, d\xi_0. \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Da M eine gerade Funktion sein muß, sind in (74) die Summenglieder mit geradem n gleich fortgelassen. Gleichung (74) stellt eine Identität dar, die nur erfüllt ist, wenn sie für jedes n befriedigt wird. Es ergibt sich also

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} M(\xi_0, 0) \sin n\pi\,(\xi_0 + \tfrac{1}{2})\, d\xi_0 = -\frac{2\,p\,a^2}{n^3\pi^3} \frac{3\,\mathfrak{Sin}^2\,\bar{\lambda} - \bar{\lambda}^2}{3\,\mathfrak{Sin}^2\,\bar{\lambda} + \bar{\lambda}^2 + 4}. \tag{75}$$

Wird (75) in (69) eingeführt, so erhält man für die Durchbiegung der Plattenmittelfläche

$$w(\xi,\eta) = \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{4\,p\,a^4}{\bar{E}\,J\,n^5\pi^5} \sin n\pi\left(\xi+\tfrac{1}{2}\right)\left\{\left[1-\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}+\tfrac{1}{2}\,\bar{\eta}\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}+\frac{1}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda}}\left(3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.-\tfrac{3}{2}\,\bar{\eta}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}-\tfrac{1}{2}\,\bar{\lambda}^2\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}\right)\right]-\frac{1}{2}\left[-\bar{\eta}\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}+\frac{1}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda}}\left\{\mathfrak{Sin}\,\eta\,(\bar{\lambda}^2+2)+\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\bar{\eta}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}\,(3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}+2)\right\}\right]\frac{3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}-\bar{\lambda}^2}{3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}+\bar{\lambda}^2+4}\right\}. \tag{76}$$

Führt man für $\lambda\to\infty$ den Übergang zum Halbstreifen unter Beachtung von (33) bis (35) und

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}-\bar{\lambda}^2}{3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}+\bar{\lambda}^2+4}=1 \tag{77}$$

durch, so läßt sich (76) folgendermaßen anschreiben:

$$w(\xi,\eta)=\frac{4\,p\,a^4}{\bar{E}\,J\,\pi^5}\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{\sin n\pi\left(\xi+\tfrac{1}{2}\right)}{n^5}\left[1-(1+n\pi\eta)\,e^{-n\pi\eta}\right]. \tag{78}$$

Dies ist die bekannte Lösung von *Nádai*[1].

Unter Benutzung von (37) läßt sich (76) wieder in die besser konvergente Lösung

$$w(\xi,\eta)=\frac{p\,a^4}{\bar{E}\,J}\left[\frac{(1-4\,\xi^2)(5-4\,\xi^2)}{384}-\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{4\sin n\pi\left(\xi+\tfrac{1}{2}\right)}{n^5\pi^5}\left\{\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}-\tfrac{1}{2}\,\bar{\eta}\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}-\frac{1}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda}}\times\right.\right.$$
$$\times\left(3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}-\tfrac{3}{2}\,\bar{\eta}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}-\tfrac{1}{2}\,\bar{\lambda}^2\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}\right)-\frac{1}{2}\left[\bar{\eta}\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}-\frac{1}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda}}\times\right.$$
$$\left.\left.\left.\times\left\{\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}\,(\bar{\lambda}^2+2)+\bar{\eta}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}\,(3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}+2)\right\}\right]\frac{3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}-\bar{\lambda}^2}{3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}+\bar{\lambda}^2+4}\right\}\right] \tag{79}$$

umformen. Die Momentensumme erhält man leicht aus (79), wenn man beachtet, daß der erste Teil der Reihe in (39) übergeht:

$$M(\xi,\eta)=p\,a^2\left\{\frac{1-4\,\xi^2}{8}-\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{4\sin n\pi\left(\xi+\tfrac{1}{2}\right)}{n^3\pi^3}\left[\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}-\frac{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\eta}\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda}}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\mathfrak{Cof}\,\bar{\eta}-\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta\,(3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}+2)}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\lambda}+\bar{\lambda}}\right)\frac{3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}-\bar{\lambda}^2}{3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}+\bar{\lambda}^2+4}\right]\right\} \tag{80}$$

und im besonderen längs der Randlinie $(\xi,0)$

$$M(\xi,0)=-4\,p\,a^2\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{\sin n\pi\left(\xi+\tfrac{1}{2}\right)}{n^3\pi^3}\,\frac{3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}-\bar{\lambda}^2}{3\,\mathfrak{Sin}^2\bar{\lambda}+\bar{\lambda}^2+4}, \tag{81}$$

d. h. eine Fourier-Entwicklung der Momentensumme, wobei die Plattenbreite der halben Periode entspricht.

Zur Vereinfachung der weiteren Untersuchungen denken wir uns nun die starre Einspannung durch das bekannte Randmoment (81) ersetzt und betrachten, da der Fall der konstanten Belastung schon in Abschnitt b) erledigt ist, nur mehr die Wirkungen des Randmomentes. Um den endgültigen Zustand zu erhalten, sind also alle folgenden Formeln mit den entsprechenden aus Abschnitt b) zu überlagern. Die nur aus dem Randmoment entstehenden Momente und Querkräfte werden zur besseren Unterscheidung mit m', q' bezeichnet.

[1] *Nádai*, Die elastischen Platten. Berlin 1925.

Die Momente ergeben sich nach (5) zu

$$\left.\begin{aligned} m'_x &= -\,p\,a^2 \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{2\sin n\pi\,(\xi+\tfrac{1}{2})}{n^3\pi^3}\,\frac{3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}-\overline{\lambda}^2}{3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}+\overline{\lambda}^2+4}\Big\{-(1-\nu)\,\overline{\eta}\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\eta}+2\,\nu\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\eta}+\\ &\quad+\frac{(1-\nu)}{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}}\left[\mathfrak{Sin}\,\overline{\eta}\,(\overline{\lambda}^2+2)+\overline{\eta}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\eta}\,(3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}+2)\right]-2\,\nu\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\overline{\eta}\,(3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}+2)}{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}}\Big\}.\\ m'_y &= -\,p\,a^2 \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{2\sin n\pi\,(\xi+\tfrac{1}{2})}{n^3\pi^3}\,\frac{3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}-\overline{\lambda}^2}{3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}+\overline{\lambda}^2+4}\Big\{\overline{\eta}\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\eta}\,(1-\nu)+2\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\eta}-\\ &\quad-\frac{(1-\nu)}{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}}\left[\mathfrak{Sin}\,\overline{\eta}\,(\overline{\lambda}^2+2)+\overline{\eta}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\eta}\,(3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}+2)\right]-2\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\overline{\eta}\,(3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}+2)}{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}}\Big\}. \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

Für die Querkräfte erhält man mit (7) aus (80)

$$\left.\begin{aligned} q'_x &= -\,p\,a \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{4\cos n\pi\,(\xi+\tfrac{1}{2})}{n^2\pi^2}\left[\mathfrak{Cof}\,\overline{\eta}-\frac{\mathfrak{Sin}\,\overline{\eta}\,(3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}+2)}{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}}\right]\frac{3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}-\overline{\lambda}^2}{3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}+\overline{\lambda}^2+4},\\ q'_y &= -\,p\,a \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{4\sin n\pi\,(\xi+\tfrac{1}{2})}{n^2\pi^2}\left[\mathfrak{Sin}\,\overline{\eta}-\frac{\mathfrak{Cof}\,\overline{\eta}\,(3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}+2)}{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}}\right]\frac{3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}-\overline{\lambda}^2}{3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}+\overline{\lambda}^2+4} \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

und entlang der Randlinien

$$\left.\begin{aligned} q'_x(\pm\tfrac{1}{2},\eta) &= \pm\,p\,a \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\mathfrak{Cof}\,\overline{\eta}-\frac{\mathfrak{Sin}\,\overline{\eta}\,(3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}+2)}{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}}\right]\frac{3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}-\overline{\lambda}^2}{3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}+\overline{\lambda}^2+4},\\ q'_y(\xi,0) &= +\,p\,a \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{4\sin n\pi\,(\xi+\tfrac{1}{2})}{n^2\pi^2}\,\frac{3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}+2}{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}}\,\frac{3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}-\overline{\lambda}^2}{3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}+\overline{\lambda}^2+4}. \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

Die Größe q'_y wird in den Ecken $(\pm\frac{1}{2},0)$ zu null. Das Torsionsmoment ergibt sich zu

$$m'_{xy} = -\,p\,a^2 \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{2\cos n\pi\,(\xi+\tfrac{1}{2})}{n^3\pi^3}\Big\{\mathfrak{Sin}\,\overline{\eta}+\overline{\eta}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\eta}-\frac{1}{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}}\left[\mathfrak{Cof}\,\overline{\eta}\,(3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}+\overline{\lambda}^2+4)+\overline{\eta}\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\eta}\,(3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}+2)\right]\Big\}\frac{3\,\mathfrak{Sin}^2\lambda-\overline{\lambda}^2}{3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}+\overline{\lambda}^2+4}(1-\nu) \tag{85}$$

und die Verwindungsreaktionen zu

$$\left.\begin{aligned} \overline{q}'_x(\pm\tfrac{1}{2},\eta) &= \pm\,p\,a \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{2}{n^2\pi^2}\Big\{2\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\eta}+\overline{\eta}\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\eta}-\frac{1}{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}}\left[\mathfrak{Sin}\,\overline{\eta}\,(6\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}+\overline{\lambda}^2+6)+\overline{\eta}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\eta}\,(3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}+2)\right]\Big\}\frac{3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}-\overline{\lambda}^2}{3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}+\overline{\lambda}^2+4}(1-\nu),\\ \overline{q}'_y(\xi,0) &= -\,p\,a \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{2\sin n\pi\,(\xi+\tfrac{1}{2})}{n^2\pi^2}\,\frac{3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}-\overline{\lambda}^2}{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}}(1-\nu). \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Die Größe $\overline{q}'_x$ wird in den Ecken $(\pm\frac{1}{2},\lambda)$ und $\overline{q}'_y$ in den Ecken $(\pm\frac{1}{2},0)$ zu null. Die Auflagerkräfte ergeben sich durch Überlagerung von (84) und (86). In den Ecken treten lotrechte Einzelkräfte vom doppelten Wert des Torsionsmomentes auf:

$$\left.\begin{aligned} m_{xy}(\pm\tfrac{1}{2},0) &= \mp\,p\,a^2 \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{2}{n^3\pi^3}\,\frac{3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}-\overline{\lambda}^2}{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}}(1-\nu),\\ m_{xy}(\pm\tfrac{1}{2},\lambda) &= \pm\,p\,a^2 \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{4}{n^3\pi^3}\,\frac{\overline{\lambda}\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}-2\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}}{3\,\mathfrak{Sin}\,\overline{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{\lambda}+\overline{\lambda}}\,\frac{3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}-\overline{\lambda}^2}{3\,\mathfrak{Sin}^2\overline{\lambda}+\overline{\lambda}^2+4}(1-\nu). \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

Die in den Ecken $(\pm\frac{1}{2},0)$ auftretenden Einzelkräfte und die Verwindungsreaktion $\overline{q}'_y(\xi,0)$ sind den nach Abschnitt b) ermittelten Werten entgegengesetzt gleich.

e) Gegenüberliegende Ränder frei aufliegend, dritter Rand eingespannt. Dreieckslast. Die Durchbiegung ergibt sich mit (50) und (72) zu

$$w(\xi,\eta) = \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{4ca^4}{\bar{E}Jn^6\pi^6} \sin n\pi(\xi+\tfrac{1}{2}) \Big[\bar{\eta} + \frac{2}{3\operatorname{Sin}\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda}+\bar{\lambda}} (\bar{\eta}\operatorname{Cof}\bar{\eta}\operatorname{Sin}\bar{\lambda} - \bar{\lambda}\operatorname{Sin}\bar{\eta}\operatorname{Cof}\bar{\lambda} - 2\operatorname{Sin}\bar{\eta}\operatorname{Sin}\bar{\lambda}) \Big] + \sum_{1}^{\infty n} \frac{a^2}{\bar{E}Jn^2\pi^2} \frac{\sin n\pi(\xi+\tfrac{1}{2})}{3\operatorname{Sin}\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda}+\bar{\lambda}} \times \Big[\operatorname{Sin}\bar{\eta}(\bar{\lambda}^2+2) - \bar{\eta}\operatorname{Sin}\bar{\eta}(3\operatorname{Sin}\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda}+\bar{\lambda}) + \bar{\eta}\operatorname{Cof}\bar{\eta}(3\operatorname{Sin}^2\bar{\lambda}+2)\Big] \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} M(\xi_0,0)\sin n\pi(\xi_0+\tfrac{1}{2})\,d\xi_0 \tag{88}$$

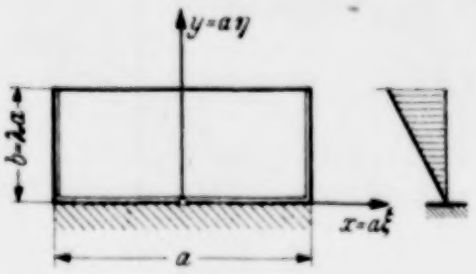


Abb. 9.

und ähnlich wie bei Abschnitt d)

$$\frac{\partial w}{\partial \eta}(\eta=0) = \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{4ca^4}{\bar{E}Jn^5\pi^5} \sin n\pi(\xi+\tfrac{1}{2}) \Big[1 - \frac{2(\operatorname{Sin}\bar{\lambda}+\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda})}{3\operatorname{Sin}\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda}+\bar{\lambda}}\Big] + \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{a^2}{\bar{E}Jn\pi} \sin n\pi(\xi+\tfrac{1}{2}) \frac{3\operatorname{Sin}^2\bar{\lambda}+\bar{\lambda}^2+4}{3\operatorname{Sin}\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda}+\bar{\lambda}} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} M(\xi_0,0)\sin n\pi(\xi_0+\tfrac{1}{2})\,d\xi_0 = 0, \tag{89}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} M(\xi_0,0)\sin n\pi(\xi_0+\tfrac{1}{2})\,d\xi_0 = -\frac{4ca^2}{n^4\pi^4} \frac{3\operatorname{Sin}\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda} - 2(\operatorname{Sin}\bar{\lambda}+\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda})+\bar{\lambda}}{3\operatorname{Sin}^2\bar{\lambda}+\bar{\lambda}^2+4}. \tag{90}$$

$$w(\xi,\eta) = \frac{4ca^4}{\bar{E}J\pi^6} \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{\sin n\pi(\xi+\tfrac{1}{2})}{n^6} \Big\{ \Big[\bar{\eta} + \frac{2}{3\operatorname{Sin}\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda}+\bar{\lambda}} (\bar{\eta}\operatorname{Cof}\bar{\eta}\operatorname{Sin}\bar{\lambda} - \bar{\lambda}\operatorname{Sin}\bar{\eta}\operatorname{Cof}\bar{\lambda} - 2\operatorname{Sin}\bar{\eta}\operatorname{Sin}\bar{\lambda})\Big] - \Big[\operatorname{Sin}\bar{\eta}(\bar{\lambda}^2+2) - \bar{\eta}\operatorname{Sin}\bar{\eta}(3\operatorname{Sin}\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda}+\bar{\lambda}) + \bar{\eta}\operatorname{Cof}\bar{\eta}(3\operatorname{Sin}^2\bar{\lambda}+2)\Big] \frac{(3\operatorname{Sin}\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda}+\bar{\lambda}) - 2(\operatorname{Sin}\bar{\lambda}+\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda})}{(3\operatorname{Sin}\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda}+\bar{\lambda})(3\operatorname{Sin}^2\bar{\lambda}+\bar{\lambda}^2+4)} \Big\}. \tag{91}$$

Für $\bar{\lambda} \to \infty$ erhält man die Durchbiegung des Halbstreifens

$$w(\xi,\eta) = \frac{4ca^4}{\bar{E}J\pi^5} \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{\eta \sin n\pi(\xi+\tfrac{1}{2})}{n^5} \big[1 - e^{-n\pi\eta}\big]. \tag{92}$$

Die weiteren Untersuchungen werden wie bei d) auf den Einfluß des Randmomentes beschränkt, die endgültigen Werte folgen dann durch Überlagerung. Die Momentensumme erhält man aus (91) zu

$$M' = -\frac{8ca^2}{\pi^4} \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{\sin n\pi(\xi+\tfrac{1}{2})}{n^4} \Big[\operatorname{Cof}\bar{\eta} - \operatorname{Sin}\bar{\eta} \frac{3\operatorname{Sin}^2\bar{\lambda}+2}{3\operatorname{Sin}\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda}+\bar{\lambda}}\Big] \frac{(3\operatorname{Sin}\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda}+\bar{\lambda}) - 2(\operatorname{Sin}\bar{\lambda}+\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda})}{3\operatorname{Sin}^2\bar{\lambda}+\bar{\lambda}^2+4} \tag{93}$$

und längs der Randlinie $(\xi, 0)$

$$M' = -\frac{8ca^2}{\pi^4} \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{\sin n\pi(\xi+\tfrac{1}{2})}{n^4} \frac{(3\operatorname{Sin}\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda}+\bar{\lambda}) - 2(\operatorname{Sin}\bar{\lambda}+\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda})}{3\operatorname{Sin}^2\bar{\lambda}+\bar{\lambda}^2+4} \tag{94}$$

Die Momente ergeben sich nach (5) zu

$$\begin{aligned} m'_x &= -\frac{4ca^2}{\pi^4} \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{\sin n\pi(\xi+\tfrac{1}{2})}{n^4} \Big\{ \Big[\operatorname{Sin}\bar{\eta}(\bar{\lambda}^2+2) - \bar{\eta}\operatorname{Sin}\bar{\eta}(3\operatorname{Sin}\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda}+\bar{\lambda}) + \bar{\eta}\operatorname{Cof}\bar{\eta}(3\operatorname{Sin}^2\bar{\lambda}+2)\Big] \times (1-\nu) + 2\Big[\operatorname{Cof}\bar{\eta}(3\operatorname{Sin}\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda}+\bar{\lambda}) - \operatorname{Sin}\bar{\eta}(3\operatorname{Sin}^2\bar{\lambda}+2)\Big]\nu \Big\} \frac{(3\operatorname{Sin}\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda}+\bar{\lambda}) - 2(\operatorname{Sin}\bar{\lambda}+\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda})}{(3\operatorname{Sin}^2\bar{\lambda}+\bar{\lambda}^2+4)(3\operatorname{Sin}\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda}+\bar{\lambda})}, \\ m'_y &= -\frac{4ca^2}{\pi^4} \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{\sin n\pi(\xi+\tfrac{1}{2})}{n^4} \Big\{ \Big[-\operatorname{Sin}\bar{\eta}(\bar{\lambda}^2+2) + \bar{\eta}\operatorname{Sin}\bar{\eta}(3\operatorname{Sin}\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda}+\bar{\lambda}) - \bar{\eta}\operatorname{Cof}\bar{\eta}(3\operatorname{Sin}^2\bar{\lambda}+2)\Big] \times (1-\nu) + 2\Big[\operatorname{Cof}\bar{\eta}(3\operatorname{Sin}\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda}+\bar{\lambda}) - \operatorname{Sin}\bar{\eta}(3\operatorname{Sin}^2\bar{\lambda}+2)\Big]\nu \Big\} \frac{(3\operatorname{Sin}\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda}+\bar{\lambda}) - 2(\operatorname{Sin}\bar{\lambda}+\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda})}{(3\operatorname{Sin}^2\bar{\lambda}+\bar{\lambda}^2+4)(3\operatorname{Sin}\bar{\lambda}\operatorname{Cof}\bar{\lambda}+\bar{\lambda})}. \end{aligned} \tag{95}$$

Für die Querkräfte erhält man mit (7)

$$\left.\begin{aligned} q'_x &= -ca\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{8\cos n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^3\pi^3}\left[\operatorname{Cof}\bar\eta-\operatorname{Sin}\bar\eta\,\frac{3\operatorname{Sin}^2\bar\lambda+2}{3\operatorname{Sin}\bar\lambda\operatorname{Cof}\bar\lambda+\bar\lambda}\right]\frac{(3\operatorname{Sin}\bar\lambda\operatorname{Cof}\bar\lambda+\bar\lambda)-2(\operatorname{Sin}\bar\lambda+\bar\lambda\operatorname{Cof}\lambda)}{3\operatorname{Sin}^2\bar\lambda+\bar\lambda^2+4},\\ q'_y &= -ca\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{8\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^3\pi^3}\left[\operatorname{Sin}\bar\eta-\operatorname{Cof}\bar\eta\,\frac{3\operatorname{Sin}^2\bar\lambda+2}{3\operatorname{Sin}\bar\lambda\operatorname{Cof}\bar\lambda+\bar\lambda}\right]\frac{(3\operatorname{Sin}\bar\lambda\operatorname{Cof}\bar\lambda+\bar\lambda)-2(\operatorname{Sin}\bar\lambda+\bar\lambda\operatorname{Cof}\bar\lambda)}{3\operatorname{Sin}^2\bar\lambda+\bar\lambda^2+4}\end{aligned}\right\}\quad(96)$$

und entlang der Randlinien

$$\left.\begin{aligned} q'_x(\pm\tfrac{1}{2},\eta) &= \pm ca\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{8}{n^3\pi^3}\left[\operatorname{Cof}\bar\eta-\operatorname{Sin}\bar\eta\,\frac{3\operatorname{Sin}^2\bar\lambda+2}{3\operatorname{Sin}\bar\lambda\operatorname{Cof}\bar\lambda+\bar\lambda}\right]\frac{(3\operatorname{Sin}\bar\lambda\operatorname{Cof}\bar\lambda+\bar\lambda)-2(\operatorname{Sin}\bar\lambda+\bar\lambda\operatorname{Cof}\bar\lambda)}{3\operatorname{Sin}^2\bar\lambda+\bar\lambda^2+4},\\ q'_y(\xi,0) &= +ca\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{8\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^3\pi^3}\,\frac{3\operatorname{Sin}^2\bar\lambda+2}{3\operatorname{Sin}\bar\lambda\operatorname{Cof}\bar\lambda+\bar\lambda}\,\frac{(3\operatorname{Sin}\bar\lambda\operatorname{Cof}\bar\lambda+\bar\lambda)-2(\operatorname{Sin}\bar\lambda+\bar\lambda\operatorname{Cof}\bar\lambda)}{3\operatorname{Sin}^2\bar\lambda+\bar\lambda^2+4}.\end{aligned}\right\}\quad(97)$$

Die Größe q'_y wird in den Ecken $(\pm\frac{1}{2},0)$ zu null. Das Torsionsmoment ergibt sich zu

$$\left.\begin{aligned} m'_{xy} = -ca^2\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{4\cos n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^4\pi^4}&\left[\operatorname{Cof}\bar\eta\,(3\operatorname{Sin}^2\bar\lambda+\bar\lambda^2+4)-(\operatorname{Sin}\bar\eta+\bar\eta\operatorname{Cof}\bar\eta)(3\operatorname{Sin}\bar\lambda\operatorname{Cof}\bar\lambda+\bar\lambda)+\right.\\ &\left.+\bar\eta\operatorname{Sin}\bar\eta\,(3\operatorname{Sin}^2\bar\lambda+2)\right]\frac{(3\operatorname{Sin}\bar\lambda\operatorname{Cof}\bar\lambda+\bar\lambda)-2(\operatorname{Sin}\bar\lambda+\bar\lambda\operatorname{Cof}\bar\lambda)}{(3\operatorname{Sin}\bar\lambda\operatorname{Cof}\bar\lambda+\bar\lambda)(3\operatorname{Sin}^2\bar\lambda+\bar\lambda^2+4)}(1-\nu).\end{aligned}\right\}\quad(98)$$

und die Verwindungsreaktionen erhalten die Form

$$\left.\begin{aligned} \bar q'_x(\pm\tfrac{1}{2},\eta) &= \mp ca\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{4}{n^3\pi^3}\left[\operatorname{Sin}\bar\eta\,(3\operatorname{Sin}^2\bar\lambda+\bar\lambda^2+4)-(2\operatorname{Cof}\bar\eta+\bar\eta\operatorname{Sin}\bar\eta)(3\operatorname{Sin}\bar\lambda\operatorname{Cof}\bar\lambda+\bar\lambda)+\right.\\ &\left.+(\operatorname{Sin}\bar\eta+\bar\eta\operatorname{Cof}\bar\eta)(3\operatorname{Sin}^2\bar\lambda+2)\right]\frac{(3\operatorname{Sin}\bar\lambda\operatorname{Cof}\bar\lambda+\bar\lambda)-2(\operatorname{Sin}\bar\lambda+\bar\lambda\operatorname{Cof}\bar\lambda)}{(3\operatorname{Sin}\bar\lambda\operatorname{Cof}\bar\lambda+\bar\lambda)(3\operatorname{Sin}^2\bar\lambda+\bar\lambda^2+4)}(1-\nu),\\ \bar q'_y(\xi,0) &= -ca\left\{\frac{1}{8}(1-4\xi^2)-\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{8\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^3\pi^3}\,\frac{\operatorname{Sin}\bar\lambda+\bar\lambda\operatorname{Cof}\bar\lambda}{3\operatorname{Sin}\bar\lambda\operatorname{Cof}\bar\lambda+\bar\lambda}\right\}(1-\nu).\end{aligned}\right\}\quad(99)$$

Die Größe $\bar q'_x$ wird in den Ecken $(\pm\frac{1}{2},\lambda)$ und $\bar q'_y$ in den Ecken $(\pm\frac{1}{2},0)$ zu null. Die Auflagerkräfte folgen durch Überlagerung von (96) und (99). In allen Ecken treten wieder lotrechte Einzelkräfte auf, wobei die Kräfte in den Ecken $(\pm\frac{1}{2},0)$ und die Verwindungsreaktion $\bar q'_y\ (\xi,0)$ den nach Abschnitt c) ermittelten Werten entgegengesetzt gleich sind:

$$\left.\begin{aligned} m'_{xy}(\pm\tfrac{1}{2},0) &= \pm ca^2\left[\frac{1}{24}-\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{8}{n^4\pi^4}\,\frac{\operatorname{Sin}\bar\lambda+\bar\lambda\operatorname{Cof}\bar\lambda}{3\operatorname{Sin}\bar\lambda\operatorname{Cof}\bar\lambda+\bar\lambda}\right](1-\nu),\\ m'_{xy}(\pm\tfrac{1}{2},\lambda) &= \pm ca^2\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{8}{n^4\pi^4}\,\frac{\bar\lambda\operatorname{Sin}\bar\lambda-2\operatorname{Cof}\bar\lambda}{3\operatorname{Sin}\bar\lambda\operatorname{Cof}\bar\lambda+\bar\lambda}\,\frac{(3\operatorname{Sin}\bar\lambda\operatorname{Cof}\bar\lambda+\bar\lambda)-2(\operatorname{Sin}\bar\lambda+\bar\lambda\operatorname{Cof}\bar\lambda)}{3\operatorname{Sin}^2\bar\lambda+\bar\lambda^2+4}(1-\nu).\end{aligned}\right\}\quad(100)$$

4. Einige Fourier- und Potenzreihen. Der Aufbau der Formeln in den vorhergegangenen Abschnitten machte in manchen Fällen eine Teilsummierung möglich, wodurch eine bessere Konvergenz erreicht wurde. Dabei sind schon für verschiedene Fourier-Reihen die geschlossenen Ausdrücke angeschrieben worden. In den Formeln für q, $\bar q$ und m_{xy} nähert sich nun gerade in den schlechter konvergierenden Reihen das Summenglied rasch einem Grenzwert, und es bleibt die reine Reihe übrig. Auf Grund dieser Eigenschaft ist auch in solchen Fällen die Ermittlung des tatsächlichen Wertes mit beliebiger Genauigkeit möglich, wobei die im folgenden zusammen-

gestellten Reihen wertvolle Dienste leisten. Der Vollständigkeit halber sind auch die schon angegebenen Reihen hier wiederholt.

$$\sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{\sin n\pi\left(\xi+\frac{1}{2}\right)}{n^5\pi^5} = \frac{1}{1536}(1-4\xi^2)(5+4\xi^2) \quad \left(-\frac{1}{2} \leqq \xi \leqq +\frac{1}{2}\right),$$

$$\sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{\cos n\pi\left(\xi+\frac{1}{2}\right)}{n^4\pi^4} = \frac{1}{96}(4\xi^3-3\xi) \quad \left(-\frac{1}{2} \leqq \xi \leqq +\frac{1}{2}\right),$$

$$\sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{\sin n\pi\left(\xi+\frac{1}{2}\right)}{n^3\pi^3} = \frac{1}{32}(1-4\xi^2) \quad \left(-\frac{1}{2} \leqq \xi \leqq +\frac{1}{2}\right),$$

$$\sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{\cos n\pi\left(\xi+\frac{1}{2}\right)}{n^2\pi^2} = \frac{1}{4}(1+\xi) \quad \left(-\frac{3}{2} \leqq \xi \leqq -\frac{1}{2}\right),$$

$$\sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{\sin n\pi\left(\xi+\frac{1}{2}\right)}{n\pi} = \frac{1}{4} \quad \left(-\frac{1}{2} \leqq \xi \leqq +\frac{1}{2}\right),$$

Durch entsprechende Wahl von ξ gewinnt man noch folgende Reihen:

$$\sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{1}{n^4\pi^4} = \frac{1}{96},$$

$$\sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{1}{n^3\pi^3} \sin\frac{n\pi}{2} = \frac{1}{32},$$

$$\sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{1}{n^3\pi^3} \sin\frac{2n\pi}{3} = \frac{1}{36},$$

$$\sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{1}{n^3\pi^3} \sin\frac{5n\pi}{6} = \frac{5}{288},$$

$$\sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{1}{8}.$$

Durch Reihenentwicklung erhält man ferner noch folgende Summen:

$$\sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{1}{n^2\pi^2} \sin\frac{n\pi}{2} = 0{,}09281\ldots,$$

$$\sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{1}{n^2\pi^2} \sin\frac{2n\pi}{3} = 0{,}08569\ldots,$$

$$\sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{1}{n^2\pi^2} \sin\frac{5n\pi}{6} = 0{,}06187\ldots,$$

$$\sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{1}{n^3\pi^3} = 0{,}03392\ldots$$

5. Geschlossene Formeln. a) Allgemeines. Für die praktische Berechnung sind einfache geschlossene Formeln den Reihen vorzuziehen. Man wird dafür lieber eine geringe Ungenauigkeit des Ergebnisses in Kauf nehmen, zumal in allen jenen Fällen, wo die Bemessung mit dem Rechenschieber erfolgt und man ohnehin nur eine Genauigkeit auf höchstens drei Stellen erreicht. Im folgenden sind daher für die bisher behandelten Fälle geschlossene Ausdrücke angegeben, bei denen der Fehler nicht größer als 1 %, ja in den meisten Fällen sogar weit kleiner wird. Die Formeln sind an Hand der Platte mit $\lambda = \frac{1}{2}$ entwickelt. Dabei konnte in vereinzelten Fällen auf eine Entwicklung der ersten Reihenglieder ($n = 1$ bis 5) nicht verzichtet werden. Bei größerem λ vereinfachen sich die Ausdrücke noch weiter, die Reihenentwicklungen entfallen dann fast durchweg. Für die Fälle mit Randeinspannung mußten die geschlossenen Ausdrücke auf die Größtwerte der Durchbiegungen und Momente beschränkt werden. Die übrigen Werte erhält man jedoch auch hier schon nach kurzer Reihenentwicklung. Es sei noch auf die in Abschnitt 6 gezeigten Tafeln 3 und 4 hingewiesen, aus denen die Größtmomente bei gleichmäßiger Belastung für jedes λ entnommen werden können.

In den Formeln ohne Σ-Zeichen bedeutet $\bar{\lambda} = \pi\lambda$, $\bar{\eta} = \pi\eta$.

b) Freie Auflagerung, gleichmäßige Belastung (Abb. 3):

$$\max w(0,\bar\lambda) = \frac{p a^4}{\bar E J}\left\{\frac{5}{384} - \frac{4}{\pi^5}\,\frac{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda + \bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda + \bar\lambda}\right\},$$

$$m_x(\xi,\bar\lambda) = p a^2\left\{\frac{1}{8}(1-4\xi^2) - \frac{4\sin\pi(\xi+\frac{1}{2})}{\pi^3}\,\frac{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda + \bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda + \bar\lambda}\right\},$$

$$m_x(0,\eta) = p a^2\left\{\frac{1}{8} - \sum_1^3{}^n\,\frac{4}{n^3\pi^3}\left[\mathfrak{Cof}\,\bar\eta - (1-\nu)\,\frac{1}{2}\,\bar\eta\,\mathfrak{Sin}\,\bar\eta + \frac{(1-\nu)}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda + \bar\lambda}\left(\frac{3}{2}\,\bar\eta\,\mathfrak{Cof}\,\bar\eta\,\mathfrak{Sin}^2\bar\lambda + \frac{1}{2}\,\bar\lambda^2\,\mathfrak{Sin}\,\bar\eta\right) - \frac{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\eta\,\mathfrak{Sin}^2\bar\lambda}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda + \bar\lambda}\right]\right\},$$

$$m_y(0,\eta) = p a^2\left\{\frac{\nu}{8} - \sum_1^3{}^n\,\frac{4}{n^3\pi^3}\sin\frac{n\pi}{2}\left[\nu\,\mathfrak{Cof}\,\bar\eta + (1-\nu)\,\frac{1}{2}\,\bar\eta\,\mathfrak{Sin}\,\bar\eta - \frac{(1-\nu)}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda + \bar\lambda}\times\left(\frac{3}{2}\,\bar\eta\,\mathfrak{Cof}\,\bar\eta\,\mathfrak{Sin}^2\bar\lambda + \frac{1}{2}\,\bar\lambda^2\,\mathfrak{Sin}\,\bar\eta\right) - \nu\,\frac{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\eta\,\mathfrak{Sin}^2\bar\lambda}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda + \bar\lambda}\right]\right\},$$

$$\max m_x(0,\bar\lambda) = p a^2\left\{\frac{1}{8} - \frac{4}{\pi^3}\,\frac{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda + \bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda + \bar\lambda}\right\},$$

$$q_x(\pm\tfrac{1}{2},\eta) = \mp p a\left\{\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left[\mathfrak{Cof}\,\bar\eta - \frac{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\eta\,\mathfrak{Sin}^2\bar\lambda}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda + \bar\lambda}\right]\right\},$$

$$q_y(\xi,0) = p a\left\{\frac{4\sin\pi(\xi+\frac{1}{2})}{\pi^2}\,\frac{3\,\mathfrak{Sin}^2\bar\lambda}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda + \bar\lambda} - R_\xi\right\}.$$

Tafel 1.

ξ	R_ξ
0	0,0340
$\frac{1}{6}$	0,0082
$\frac{1}{3}$	−0,0448

In Tafel 1 ist R_ξ für einige Werte von ξ ermittelt.

$$m_{xy}(\pm\tfrac{1}{2},0) = \pm p a^2\left\{\frac{2}{\pi^3}\,\frac{3\,\mathfrak{Sin}^2\bar\lambda - \bar\lambda^2}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda + \bar\lambda} + 0{,}0033\right\}(1-\nu),$$

$$m_{xy}(\pm\tfrac{1}{2},\bar\lambda) = \pm p a^2\,\frac{4}{\pi^3}\,\frac{\bar\lambda\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda + \bar\lambda}(1-\nu),$$

$$\bar q_x(\pm\tfrac{1}{2},\eta_l) = \pm p a\sum_1^5{}^n\,\frac{2}{n^2\pi^2}\left[\bar\eta\,\mathfrak{Sin}\,\bar\eta - \frac{3\,\bar\eta\,\mathfrak{Cof}\,\bar\eta\,\mathfrak{Sin}^2\bar\lambda + \bar\lambda^2\,\mathfrak{Sin}\,\bar\eta}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda + \bar\lambda}\right](1-\nu),$$

$$\bar q_y(\xi,0) = + p a\left[\frac{2\sin\pi(\xi+\frac{1}{2})}{\pi^2}\,\frac{3\,\mathfrak{Sin}^2\bar\lambda - \bar\lambda^2}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda + \bar\lambda} - \bar R_\xi\right](1-\nu).$$

Tafel 2.

ξ	$\bar R_\xi$
0	0,0170
$\frac{1}{6}$	0,0041
$\frac{1}{3}$	−0,0224

Einige Werte von $\bar R_\xi$ sind in Tafel 2 zusammengestellt.

c) Freie Auflagerung, dreieckförmige Belastung (Abb. 6):

$$\max w(0,\bar\lambda) = \frac{c a^4}{\bar E J}\,\frac{4}{\pi^6}\left[\bar\lambda - \frac{4\,\mathfrak{Sin}^2\bar\lambda}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda + \bar\lambda}\right],$$

$$m_x(\xi,\bar\lambda) = c a^2\sum_1^5{}^n\,\frac{4\sin n\pi(\xi+\frac{1}{2})}{n^4\pi^4}\left[\bar\lambda - \frac{4\,\mathfrak{Sin}^2\bar\lambda}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda + \bar\lambda}\right],$$

$$m_x(0,\eta) = c a^2\sum_1^5{}^n\,\frac{4\sin\frac{n\pi}{2}}{n^4\pi^4}\left[\bar\eta + \frac{2(1-\nu)}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda + \bar\lambda}(\bar\eta\,\mathfrak{Cof}\,\bar\eta\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda - \bar\lambda\,\mathfrak{Sin}\,\bar\eta\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda) - \frac{4\,\mathfrak{Sin}\,\bar\eta\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda + \bar\lambda}\right],$$

$$m_y(0,\eta) = c a^2\sum_1^3{}^n\,\frac{4\sin\frac{n\pi}{2}}{n^4\pi^4}\left[\nu\,\bar\eta - \frac{2(1-\nu)}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda + \bar\lambda}(\bar\eta\,\mathfrak{Cof}\,\bar\eta\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda - \bar\lambda\,\mathfrak{Sin}\,\bar\eta\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda) - \nu\,\frac{4\,\mathfrak{Sin}\,\bar\eta\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda}{3\,\mathfrak{Sin}\,\bar\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\bar\lambda + \bar\lambda}\right],$$

$$\max m_x(0,\bar{\lambda}) = c a^2 \sum_1^5{}^n \frac{4 \sin \frac{n\pi}{2}}{n^4 \pi^4} \left[\bar{\lambda} - \frac{4 \operatorname{Sin}^2 \bar{\lambda}}{3 \operatorname{Sin} \bar{\lambda} \operatorname{Cof} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}}\right],$$

$$q_x\left(\pm \tfrac{1}{2}, \bar{\lambda}\right) = \mp c a \left[\frac{4}{\pi^3}\left(\bar{\lambda} - \frac{4 \operatorname{Sin}^2 \bar{\lambda}}{3 \operatorname{Sin} \bar{\lambda} \operatorname{Cof} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}}\right) + 0{,}0947\,\bar{\lambda} - 0{,}0089\right],$$

$$q_x\left(\pm \tfrac{1}{2}, 0 \leqq \eta \leqq \tfrac{2\lambda}{3}\right) = \mp c a \left[\sum_1^3{}^n \frac{4}{n^3 \pi^3}\left(\bar{\eta} - \frac{4 \operatorname{Sin} \bar{\eta} \operatorname{Sin} \bar{\lambda}}{3 \operatorname{Sin} \bar{\lambda} \operatorname{Cof} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}}\right) + 0{,}0497\,\eta\right],$$

$$q_y(\xi, 0) = + c a \left[\frac{1}{8}(1 - 4\xi^2) - \frac{4 \sin \pi(\xi + \frac{1}{2})}{\pi^3} \frac{4 \operatorname{Cof} \bar{\eta} \operatorname{Sin} \bar{\lambda}}{3 \operatorname{Sin} \bar{\lambda} \operatorname{Cof} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}}\right],$$

$$m_{xy}\left(\pm \tfrac{1}{2}, 0\right) = \pm c a^2 \left[\frac{1}{24} - \frac{8}{\pi^4} \frac{\operatorname{Sin} \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \operatorname{Cof} \bar{\lambda}}{3 \operatorname{Sin} \bar{\lambda} \operatorname{Cof} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}}\right](1 - r),$$

$$m_{xy}\left(\pm \tfrac{1}{2}, \bar{\lambda}\right) = \pm c a^2 \left[\frac{1}{24} - \frac{8}{\pi^4} \frac{\operatorname{Sin} \bar{\lambda} \operatorname{Cof} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}}{3 \operatorname{Sin} \bar{\lambda} \operatorname{Cof} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}}\right](1 - r),$$

$$\bar{q}_x\left(\pm \tfrac{1}{2}, \eta\right) = \pm c a \sum_1^3{}^n \frac{8}{n^3 \pi^3} \frac{\bar{\eta} \operatorname{Cof} \bar{\eta} \operatorname{Sin} \bar{\lambda} - \bar{\lambda} \operatorname{Sin} \bar{\eta} \operatorname{Cof} \bar{\lambda}}{3 \operatorname{Sin} \bar{\lambda} \operatorname{Cof} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}}(1 - r),$$

$$\bar{q}_y(\xi, 0) = + c a \left[\frac{1}{8}(1 - 4\xi^2) - \frac{8 \sin \pi(\xi + \frac{1}{2})}{\pi^3} \frac{\operatorname{Sin} \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \operatorname{Cof} \bar{\lambda}}{3 \operatorname{Sin} \bar{\lambda} \operatorname{Cof} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}}\right](1 - r).$$

d) Dritter Rand eingespannt, gleichmäßige Belastung (Abb. 8). Es werden nur die Anteile w', m' aus dem Randmoment angegeben. Die endgültigen Werte erhält man durch Überlagerung mit den entsprechenden Werten aus Abschnitt b).

$$w'(0,\bar{\lambda}) = -\frac{p a^4}{\bar{E} J} \frac{4}{\pi^5} \frac{\operatorname{Sin} \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \operatorname{Cof} \bar{\lambda}}{3 \operatorname{Sin} \bar{\lambda} \operatorname{Cof} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}} \frac{3 \operatorname{Sin}^2 \bar{\lambda} - \bar{\lambda}^2}{3 \operatorname{Sin}^2 \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^2 + 4},$$

$$m'_x(0,\bar{\lambda}) = p a^2 \frac{4}{\pi^3} \frac{\operatorname{Sin} \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \operatorname{Cof} \bar{\lambda}}{3 \operatorname{Sin} \bar{\lambda} \operatorname{Cof} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}} \frac{3 \operatorname{Sin}^2 \bar{\lambda} - \bar{\lambda}^2}{3 \operatorname{Sin}^2 \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^2 + 4},$$

$$m'_y(0,0) = p a^2 \left(\frac{4}{\pi^3} \frac{3 \operatorname{Sin}^2 \bar{\lambda} - \bar{\lambda}^2}{3 \operatorname{Sin}^2 \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^2 + 4} - 0{,}0040\right).$$

e) Dritter Rand eingespannt, Dreieckslast (Abb. 9). Es werden wieder nur die Anteile aus dem Randmoment angegeben.

$$w'(0,\bar{\lambda}) = -\frac{c a^4}{\bar{E} J} \frac{8}{\pi^6} \frac{\operatorname{Sin} \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \operatorname{Cof} \bar{\lambda}}{3 \operatorname{Sin} \bar{\lambda} \operatorname{Cof} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}} \frac{(3 \operatorname{Sin} \bar{\lambda} \operatorname{Cof} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}) - 2(\operatorname{Sin} \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \operatorname{Cof} \bar{\lambda})}{3 \operatorname{Sin}^2 \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^2 + 4},$$

$$m'_x(0,\bar{\lambda}) = c a^2 \frac{8}{\pi^4} \frac{\operatorname{Sin} \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \operatorname{Cof} \bar{\lambda}}{3 \operatorname{Sin} \bar{\lambda} \operatorname{Cof} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}} \frac{(3 \operatorname{Sin} \bar{\lambda} \operatorname{Cof} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}) - 2(\operatorname{Sin} \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \operatorname{Cof} \bar{\lambda})}{3 \operatorname{Sin}^2 \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^2 + 4},$$

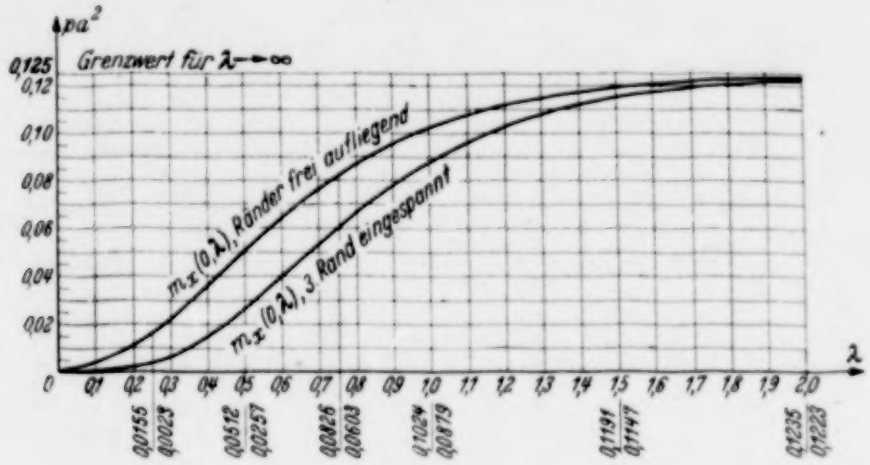
$$m'_y(0,0) = c a^2 \left[\frac{8}{\pi^4} \frac{(3 \operatorname{Sin} \bar{\lambda} \operatorname{Cof} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}) - 2(\operatorname{Sin} \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \operatorname{Cof} \bar{\lambda})}{3 \operatorname{Sin}^2 \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^2 + 4} - 0{,}0009\right].$$

6. Beispiele. a) Allgemeines. **Wie die folgenden Beispiele zeigen, vergünstigt die dreiseitige Lagerung — die ja oft vorhanden ist und nur der Einfachheit halber nicht in Rechnung gestellt wird — die Verhältnisse sehr wesentlich. Bei großem λ und freier Auflagerung oder Einspannung des dritten Randes reicht dessen Einfluß bis in eine Entfernung $\eta = 2\lambda$, während bei kleinem λ und Einspannung des dritten Randes durch die Wirkung der Querränder bedeutend günstigere Verhältnisse als bei der Kragplatte eintreten. Zur besseren Übersicht sind die Momente $m_x(0,\lambda)$ und $m_y(0,0)$ für gleichmäßige Belastung und verschiedene Randbedingungen in Tafel 3 und 4 in Abhängigkeit von λ dargestellt. Gleichzeitig können in den Tafeln die Momente für Zwischenwerte von λ abgegriffen werden.**

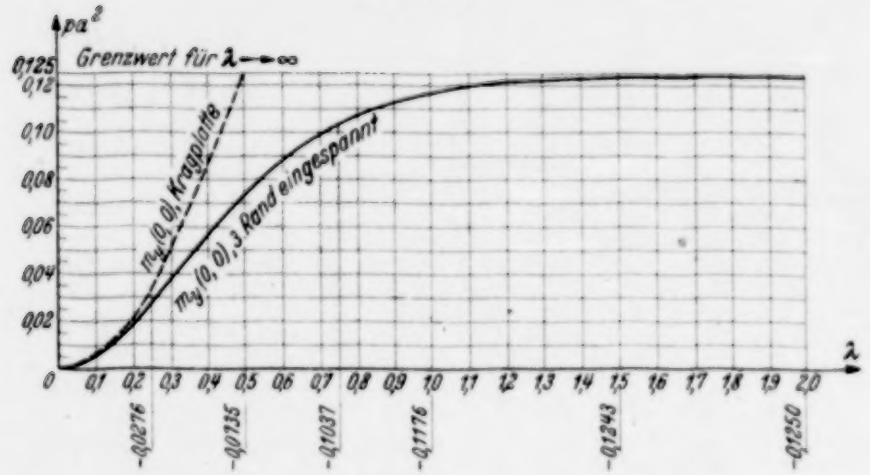
Die größten Momente treten bei den hier behandelten Belastungen immer an den Rändern auf, für die ja die Querdehnung keinen Einfluß hat. Bei Einführung einer Querdehnungszahl

würden sich also nur untergeordnete Momente, die Verwindungsreaktionen und die Einzellasten in den Ecken geringfügig ändern. Die Beispiele sind für $\nu = 0$ einmal mit Aufrundung in der fünften Dezimale und einmal mit den Näherungsformeln gerechnet und die so gewonnenen Werte einander gegenübergestellt.

Tafel 3.



Tafel 4.



Im folgenden sind die wichtigen statischen Werte für einige Belastungsfälle zusammengestellt.

b) Freie Auflagerung, gleichmäßige Belastung (Abb. 3). Siehe Tafel 5 und Abb. 10. Die Einzellasten in den Ecken sind gering:

$$P(\pm\tfrac{1}{2}, 0) = -0{,}12156\, p a^2,$$
$$P(\pm\tfrac{1}{2}, \lambda) = +0{,}03706\, p a^2.$$

c) Freie Auflagerung, Dreieckslast (Abb. 6). Siehe Tafel 6 und Abb. 11. Die Einzellasten in den Ecken sind gering:

$$P(\pm\tfrac{1}{2}, 0) = -0{,}04934\, c a^2,$$
$$P(\pm\tfrac{1}{2}, \lambda) = +0{,}03380\, c a^2.$$

d) Dritter Rand eingespannt, gleichmäßige Belastung (Abb. 8). Siehe Tafel 7 und Abb. 12. Die Einzellasten in den Ecken $(\pm\frac{1}{2}, \lambda)$ sind gering:

$$P(\pm\tfrac{1}{2}, 0) = +0{,}03828\, p a^2.$$

(Eingegangen am 16. Februar 1945.)

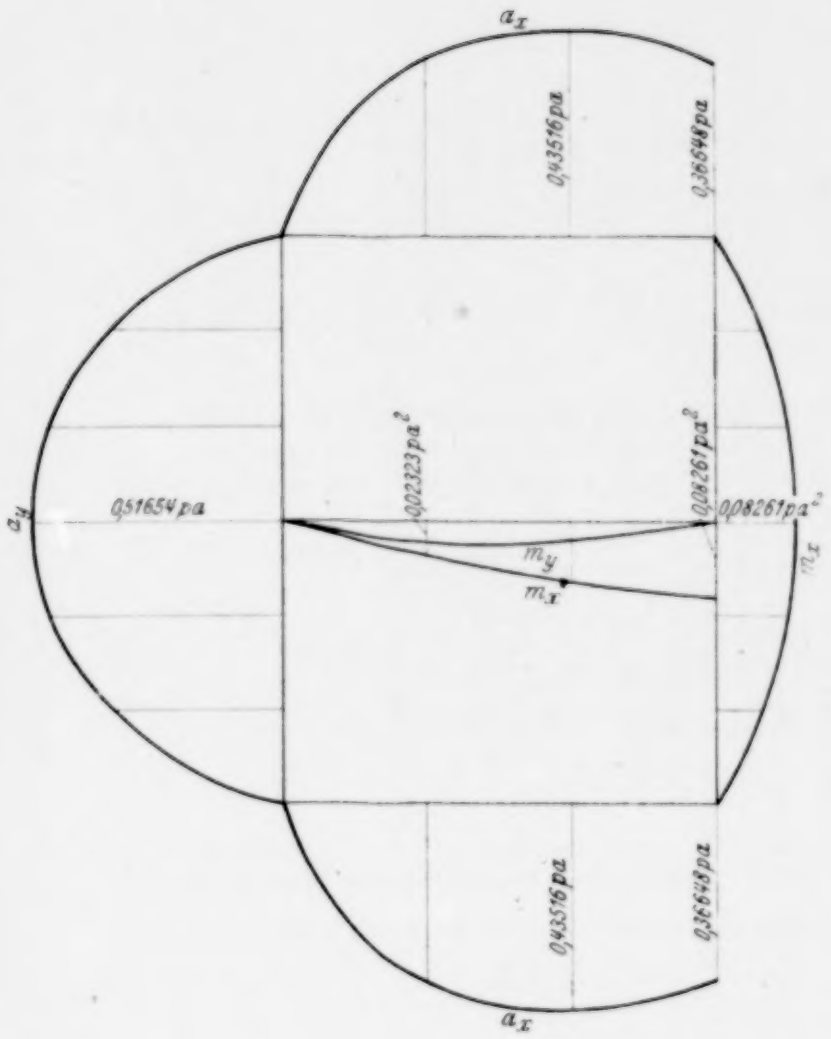


Abb. 10.

Tafel 5.

$\lambda=0{,}75$	ξ	η	Genaue Werte	Näherungs-Werte	Faktor
m_x	0		0,08261	0,0826	
	$\frac{1}{6}$	λ	0,07437	0,0744	
	$\frac{1}{3}$		0,04820	0,0482	
	0	$\frac{\lambda}{3}$	0,03838	0,0384	
		$\frac{2\lambda}{3}$	0,06576	0,0658	$p\,a^2$
m_y	0	$\frac{\lambda}{3}$	0,02323	0,0232	
		$\frac{2\lambda}{3}$	0,01918	0,0192	
m_{xy}	$\frac{1}{2}$	0	0,06078	0,0607	
		λ	0,01853	0,0185	
q_x	$\frac{1}{2}$	$\frac{\lambda}{3}$	0,29484	0,2995	
		$\frac{2\lambda}{3}$	0,37358	0,3740	
		λ	0,36648	0,3667	
q_y	0	0	0,35310	0,3531	
	$\frac{1}{6}$		0,32703	0,3271	
	$\frac{1}{3}$		0,23841	0,2384	$p\,a$
$\bar{q}_x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\lambda}{3}$	0,08028	0,0801	
		$\frac{2\lambda}{3}$	0,06158	0,0616	
$\bar{q}_y$	0	0	0,16344	0,1635	
	$\frac{1}{6}$		0,15216	0,1522	
	$\frac{1}{3}$		0,11265	0,1126	

Tafel 6.

$\lambda = 0{,}75$	ξ	η	Genaue Werte	Näherungs-Werte	Faktor
m_x	0	λ	0,04204	0,0422	$c\,a^2$
	$\frac{1}{6}$		0,03810	0,0379	
	$\frac{1}{3}$		0,02525	0,0254	
	0	$\frac{\lambda}{3}$	0,01736	0,0174	
		$\frac{2\lambda}{3}$	0,03168	0,0318	
m_y	0	$\frac{\lambda}{3}$	0,00521	0,0052	
		$\frac{2\lambda}{3}$	0,00786	0,0079	
m_{xy}	$\frac{1}{2}$	0	0,02467	0,0247	
		λ	0,01690	0,0173	
q_x	$\frac{1}{2}$	$\frac{\lambda}{3}$	0,09764	0,0976	$c\,a$
		$\frac{2\lambda}{3}$	0,17706	0,1770	
		λ	0,20179	0,2017	
q_y	0	0	0,09358	0,0936	
	$\frac{1}{6}$		0,08389	0,0839	
	$\frac{1}{3}$		0,05374	0,0537	
$\bar{q}_x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\lambda}{3}$	0,01653	0,0165	
		$\frac{2\lambda}{3}$	0,02522	0,0252	
$\bar{q}_y$	0	0	0,19663	0,1966	
	$\frac{1}{6}$		0,17597	0,1760	
	$\frac{1}{3}$		0,11215	0,1122	

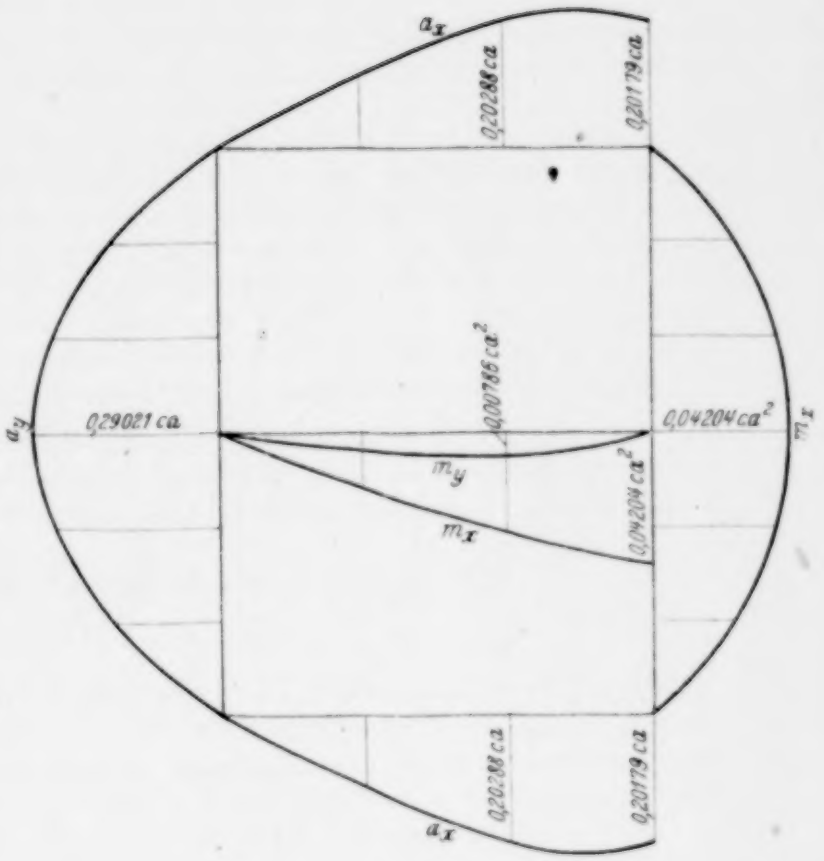


Abb. 11.

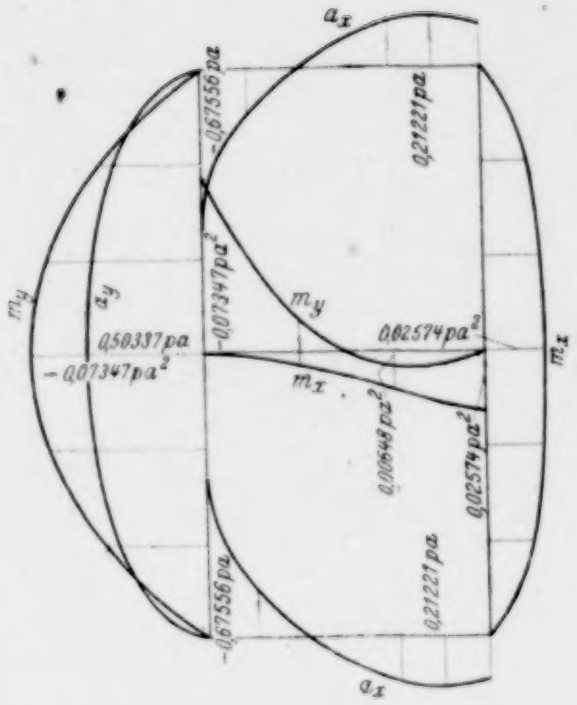


Abb. 12.

Tafel 7.

$\lambda = 0{,}5$	ξ	η	Genaue Werte	Faktor
m_x	0	λ	0,02574	$p\,a^2$
	$\frac{1}{6}$		0,02482	
	$\frac{1}{3}$		0,01956	
	0	$\frac{\lambda}{3}$	0,00540	
		$\frac{2\lambda}{3}$	0,01574	
m_y	0	$\frac{\lambda}{3}$	− 0,01429	
		$\frac{2\lambda}{3}$	0,00648	
	0	0	− 0,07347	
	$\frac{1}{6}$		− 0,06646	
	$\frac{1}{3}$		− 0,04366	
m_{xy}	$\frac{1}{2}$	λ	0,01914	
q_x	$\frac{1}{2}$	0	− 0,33778	
		$\frac{\lambda}{3}$	0,05170	
		$\frac{2\lambda}{3}$	0,17099	
		λ	0,18329	
q_y	0	0	0,50337	$p\,a$
	$\frac{1}{6}$		0,47816	
	$\frac{1}{3}$		0,37494	
$\bar{q}_x$	$\frac{1}{2}$	0	− 0,33778	
		$\frac{\lambda}{3}$	− 0,03534	
		$\frac{2\lambda}{3}$	0,02643	

Symmetrische Beanspruchung der Walze durch radial wirkende Einzelkräfte.

Von **K. Eisenmann** in Braunschweig.

1. Einleitung. Im Stahlbeton werden gewöhnlich senkrecht zu den statischen Zug oder Druck aufnehmenden Stahleinlagen sogenannte Verteilungseisen angeordnet, die eine gleichmäßige Verteilung der Spannkräfte auf die statischen Eisen und den umgebenden Beton bewirken sollen.

Auch bei umschnürten Betonsäulen werden Längseisen — gewöhnlich acht — am Rande der Kernfläche der Säulen vorgeschrieben, einmal um den Druck in der Säule mit zu übernehmen, und ferner, um eine gleichmäßigere Verteilung der durch die umschnürende Spirale ausgeübten Druckkraft in der Kernfläche zu sichern. Trotzdem in den Bestimmungen für Ausführung von Bauwerken in Stahlbeton DIN 1045 S. 20 für den Querschnitt der Längsbewehrungen bestimmte Vorschriften bestehen, ist bisher die verteilende Wirkung dieser Längseisen noch nicht untersucht worden.

Die Wirkung dieser Längseisen kann durch ebensoviele radial auf die Oberfläche einer Walze wirkende symmetrisch angeordnete Einzelkräfte gleicher Größe ersetzt und die sich ergebende Spannung berechnet werden, so daß eine theoretisch genau begrenzte Aufgabe zu lösen ist, deren Ergebnis ersichtlich auch allgemein für nicht zum Stahlbeton gehörige Aufgaben zu benutzen ist. *E. Kohl* hat das Problem der Beanspruchung einer Scheibe durch radial wirkende Kräfte allgemein durch Einführung Fourierscher Reihen gelöst[1]; es wird im folgenden gezeigt, daß bei symmetrischer Anordnung der Einzelkräfte die Spannungen durch geschlossene einfache Formeln dargestellt werden können, wenn das Gesetz der Superposition angewendet wird.

2. Die mechanischen Grundlagen. Wird eine Walze vom Halbmesser R und der Länge l durch radial wirkende symmetrisch angeordnete Einzelkräfte P gleicher Größe beansprucht, so kann man auf das von *H. Hertz* gelöste Problem zurückgreifen, wonach die Walze durch zwei solcher Kräfte gedrückt wird[2].

Für diesen Fall hat *Hertz* die Airysche Spannungsfunktion aufgestellt (Abb. 1)

$$G = c\left(\frac{r^2}{2R} - r_1 a_1 \sin a_1 - r_2 a_2 \sin a_2\right),$$

aus deren Ableitungen die Radialspannungen σ_r, die Tangentialspannungen σ_t und die Schubspannungen τ_{rt} errechnet werden können. Führt man zweckmäßig die Zylinderkoordinaten r, a, x ein (Abb. 1 und 2), wo r den vom Mittelpunkt des Kreisquerschnitts nach dem Aufpunkt gezogenen Fahrstrahl, a den vom Fahrstrahl mit der y-Achse gebildeten beliebigen Winkel und x die parallel zur Zylinderachse gemessene Ordinate bedeuten, so erhält man

$$G = c\left[r^2 - r \sin a \operatorname{arctg} \frac{2Rr \sin a}{R^2 - r^2}\right] \quad \text{mit } c = \frac{P}{\pi l} \tag{1}$$

wegen $$r_1 \sin a_1 = r_2 \sin a_2 = r \sin a$$

und $$\operatorname{tg}(a_1 + a_2) = \frac{2R \sin a_2}{2R \cos a_2 - r_2} = \frac{2R(r_2 \sin a_2)}{2R(r_2 \cos a_2) - r_2^2} = \frac{2Rr \sin a}{R^2 - r^2}.$$

Man gewinnt dann aus (1)

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G}{\partial a^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial r}, \tag{2}$$

$$\sigma_t = \frac{\partial^2 G}{\partial r^2}, \tag{3}$$

$$\tau_{rt} = \frac{\partial^2 G/r}{\partial r\, \partial \tau}. \tag{4}$$

Zunächst ist für die Praxis darauf hinzuweisen, daß in den Angriffspunkten der Einzelkräfte P nicht der theoretische Wert ∞, sondern der Spannungswert einer Streckenlast von der kleinen Breite $R\Delta a$ zu setzen ist, so daß $p = P/R\Delta a$ wird.

[1] *E. Kohl*, Ing.-Arch. 1 (1930) S. 211.
[2] *H. Hertz*, Z. Math. Phys. 28 (1883); *L. Föppl*, Drang und Zwang, Bd. 1, § 53, S. 318.

Für zwei Einzelkräfte findet man aus der Beziehung (2) die Radialspannung

$$\sigma_r = -\frac{P}{\pi R l}\,\frac{1-4u+4u^2-u^4+2(1-u)^2\cos 2\alpha}{(1+u^2-2u\cos 2\alpha)^2} \quad \text{mit } u=\frac{r^2}{R^2}. \tag{5}$$

Führt man zur Abkürzung ein

$$A=1-4u+4u^2-u^4,\ B=2(1-u)^2, \tag{6}$$

$$a=1+u^2,\ b=2u,\quad N=a-b\cos 2\alpha, \tag{7}$$

so wird

$$\sigma_r=-p'S \quad \text{mit } S=T_1=\frac{A+B\cos 2\alpha}{N^2},\ p'=\frac{P}{\pi R l}. \tag{8}$$

Eine sehr wichtige Eigenschaft der dieser Formel zugrunde liegenden linearen Differentialgleichung ist, daß sie die Überlagerung der Einzelwirkungen erlaubt. Bringt man daher 4, 6, 8,

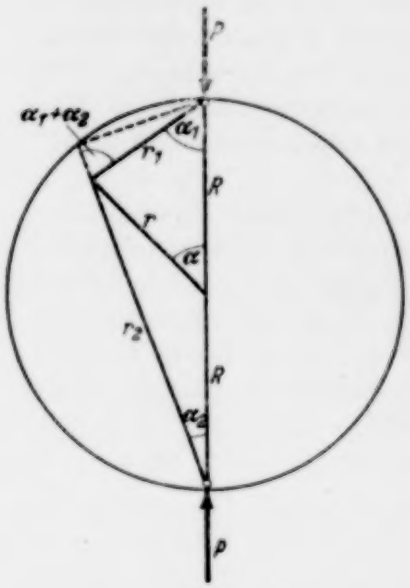
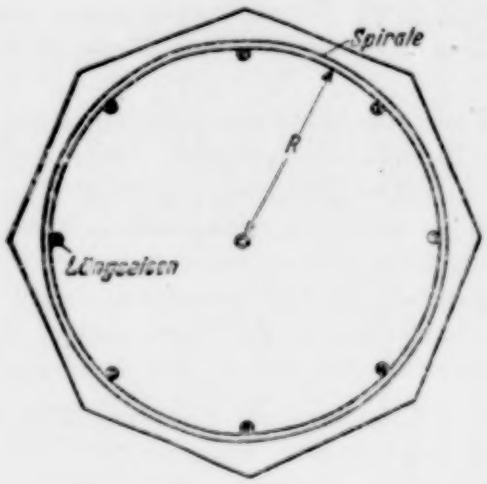


Abb. 1.



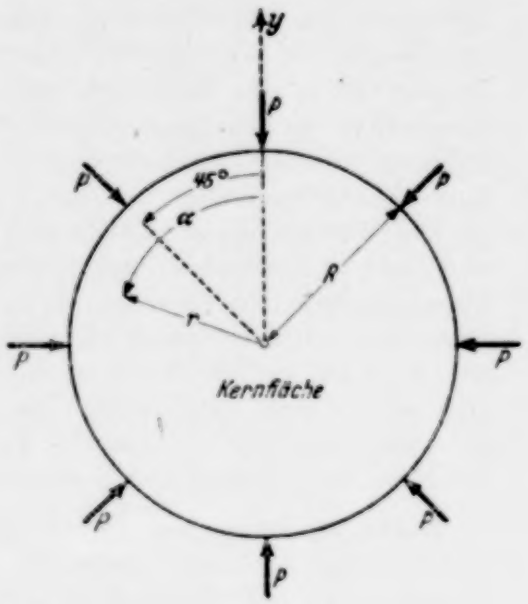


Abb. 2.

10 usw. dem Betrage nach gleich große Kräfte P in kreissymmetrischer Verteilung an (Abb. 2), so ist ersichtlich, daß man unter Berücksichtigung des Teilungswinkels ψ alle Einzelspannungen von je zwei gegeneinander wirkenden Kräften P zur Gesamtspannung addieren kann, die sich aus dem Wirken aller Kräfte P ergibt.

Ist die Anzahl der an der Walze wirkenden Kräfte P zunächst eine gerade Zahl, und bezeichnet man die um den Phasenwinkel gleich dem doppelten Teilungswinkel $q=2\psi$ verschobenen cos-Funktionen mit f, nämlich

$$f_1=\cos 2\alpha,\ f_2=\cos(2\alpha-q),\ f_3=\cos(2\alpha-2q),\ \ldots\ f_n=\cos[2\alpha-(n-1)q]$$

und die entsprechenden Ausdrücke von S mit

$$T_1=\frac{A+Bf_1}{N_1^2},\quad T_2=\frac{A+Bf_2}{N_2^2},\ \ldots\ T_n=\frac{A+Bf_n}{N_n^2},$$

wobei

$$N_1=a-bf_1,\quad N_2=a-bf_2,\ \ldots\ N_n=a-bf_n,$$

so erhält man nach dem Überlagerungsgesetz für die gesamte Radialspannung der $2n$-Kräfte P

$$\sigma_{2n}=-p'(T_1+T_2+\cdots+T_n).$$

Bezeichnet man den mittleren Druck mit $p'_{2n}=nP/(\pi RL)$, der als Druck aufgefaßt werden kann, der herrschen würde, wenn die $2n$-Einzelkräfte P als Streckenlast gleichmäßig auf der Oberfläche der Walze verteilt wären, und setzt man, was stets zulässig ist, $\sigma_{2n}=-p'_{2n}\,S_{2n}$, so erhält man für eine gerade Zahl von $2n$-Kräften P als Überlagerungsgesetz

$$S_{2n}=\frac{1}{n}(T_1+T_2+\cdots+T_n)=\frac{A}{n}\sum\frac{1}{N^2}+\frac{B}{n}\sum\frac{f}{N^2} \tag{9}$$

mit den Summen

$$\sum\frac{1}{N^2}=\frac{1}{N_1^2}+\frac{1}{N_2^2}+\cdots+\frac{1}{N_n^2},\quad \sum\frac{f}{N^2}=\frac{f_1}{N_1^2}+\frac{f_2}{N_2^2}+\cdots+\frac{f_n}{N_n^2}. \tag{9a}$$

Im folgenden wird bewiesen, daß, wenn $2n$-Kräfte P die Walze in kreissymmetrischer Anordnung beanspruchen, wobei $2n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ usw., also jede gerade oder ungerade ganze Zahl sein kann, die Radialspannung durch die allgemeine Gleichung gegeben ist

$$-\frac{\sigma_{2n}}{p'_{2n}} = S_{2n} = \frac{A_{2n} + B_{2n}\cos 2n\alpha}{N^2_{2n}} \quad \text{mit } p'_{2n} = \frac{n P}{\pi R L}. \tag{10}$$

Hierin bedeuten

$$A_{2n} = 1 - 4n u^{2n-1} + 4n u^{2n} - u^{4n}, \tag{11}$$

$$B_{2n} = 2u^{n-1}\left[n - (n+1)u + n u^{2n} - (n-1)u^{2n+1}\right], \tag{12}$$

$$a_{2n} = 1 + u^{2n},\ b_{2n} = 2u^n, \tag{13}$$

$$N_{2n} = a_{2n} - b_{2n}\cos 2n\alpha = 1 + u^{2n} - 2u^n \cos 2n\alpha. \tag{14}$$

Demnach lautet die allgemeine Gleichung zur Berechnung der Radialspannungen bei Beanspruchung der Walze durch $2n$-Einzelkräfte P in kreissymmetrischer Beanspruchung.

$$\sigma_{2n} = -\frac{n P}{\pi R l}\,\frac{1 - 4n u^{2n-1} + 4n u^{2n} - u^4 + 2u^{n-1}\left[n - (n+1)u + n u^{2n} - (n-1)u^{2n+1}\right]\cos 2n\alpha}{(1 + u^{2n} - 2u^n \cos 2n\alpha)^2}. \tag{15}$$

Ist im *Hertz*schen Fall $n = 1$, beanspruchen also nur zwei Kräfte die Walze, so erhält man wieder die Ausgangsgleichung (5) zur Berechnung von σ_{2n}.

Während das Gesetz der Überlagerung der Wirkungen ohne weiteres angewendet werden darf, wenn stets je zwei die Walze beanspruchende Einzelkräfte P diametral gegeneinander wirken, für welchen Fall $2n$ eine gerade Zahl Kräfte bedeutet, erscheint es zunächst zweifelhaft, ob das Gesetz der Überlagerung auch bei ungerader Zahl $2n$ anwendbar bleibt, da sich dann zwei Einzelkräfte P nicht mehr gegenüberstehen, so daß der Ausgangspunkt der *Hertz*schen Untersuchung von nur zwei Einzelkräften nicht mehr gegeben ist.

Im folgenden soll daher gezeigt werden, daß die allgemeine Formel (15) auch für eine ungerade Zahl Kräfte $2n = 3, 5, 7, \ldots$ gelten muß, wenn sie voraussetzungsgemäß für eine gerade Zahl Kräfte $2n = 2, 4, 6, \ldots$ Gültigkeit hat.

Ist nämlich $2n$ eine ungerade Zahl, so denke man sich die Spannung von $4n$-Kräften durch die Übereinanderlagerung zweier Kräftegruppen von je $2n$ in einem regelmäßigen $2n$-Eck angeordneten Kräften entstanden, von denen die eine Kräftegruppe um den halben Teilungswinkel $360/4n$ des $2n$-Ecks gegen die andere gedreht ist, so daß die beiden übereinandergelagerten $2n$-Ecke das $4n$-Eck bilden.

Bezeichnen σ_{2n} und σ'_{2n} die durch die beiden Kräftegruppen von je $2n$-Kräften erzeugten und σ_{4n} die durch alle $4n$-Kräfte hervorgerufenen Radialspannungen, so wird mit (10)

$$\sigma_{2n} + \sigma'_{2n} = \sigma_{4n} = -p'_{4n}\,\frac{A_{4n} + B_{4n}\cos 4n\alpha}{(a_{4n} - b_{4n}\cos 4n\alpha)^2} = -p'_{4n}\,S_{4n}. \tag{16}$$

Für die rechte, durch $4n$ gekennzeichnete Seite der Gleichung gelten voraussetzungsgemäß (10) bis (15); für die linke, durch $2n$ gekennzeichnete Seite setzen wir $\sigma_{2n} = -p'_{2n}S_{2n}$, $\sigma'_{2n} = -p'_{2n}S'_{2n}$, so daß die allgemeine Überlagerungsgleichung für gerade und ungerade Anzahl Kräfte P

$$S_{2n} + S'_{2n} = 2S_{4n} = \frac{1}{n}(T_1 + T_2 + \cdots + T_{2n}) \tag{17}$$

wird.

Hierin ist die Größe S_{2n} zu ermitteln. Zunächst kann ausgesagt werden, daß S_{2n} und S'_{2n} der Form nach sich nicht unterscheiden, insofern in dem Ausdruck für S'_{2n} nur statt des Winkels α der Winkel $\alpha' = \alpha - 360/4n$ zu setzen ist, da die zweite Kräftegruppe gegen die erste um den Winkel $360/4n$ gedreht ist; man erhält dann

$$\cos 2n\alpha' = \cos(2n\alpha - 180) = -\cos 2n\alpha, \tag{18}$$

worin man S'_{2n} als den konjugierten Wert von S_{2n} bezeichnen kann.

Unterstellen wir jetzt den im folgenden mathematischen Teil bewiesenen Ansatz, daß der Ausdruck σ_{2n} in derselben Form darstellbar sei wie bei einer geraden Anzahl Kräften, so wird nach (17)

$$\frac{A_{2n} + B_{2n}\cos 2n\alpha}{(a_{2n} - b_{2n}\cos 2n\alpha)^2} + \frac{A_{2n} - B_{2n}\cos 2n\alpha}{(a_{2n} + b_{2n}\cos 2n\alpha)^2} = 2\,\frac{A_{4n} + B_{4n}\cos 4n\alpha}{(a_{4n} - b_{4n}\cos 4n\alpha)^2}. \tag{19}$$

Berücksichtigt man, daß hierin der Winkel α gänzlich willkürlich ist, so lassen sich aus Zähler und Nenner von (19) je zwei gesonderte Gleichungen gewinnen, aus denen sich A_{2n}, B_{2n}, a_{2n}, b_{2n} berechnen lassen. Die so berechneten Werte stimmen mit denen von (11) bis (14) überein, die nach dem Überlagerungsgesetz für eine gerade Anzahl $2n$-Kräfte P abgeleitet wurden.

Hiermit ist gezeigt, daß (15) für eine ungerade Zahl $2n$-Kräfte P gilt, wenn sie für eine gerade Zahl $2n$ gültig ist; z. B. erhält man für drei symmetrische Kräfte P die Radialspannung

$$\sigma_3 = -\frac{3P}{2\pi Rl}\,\frac{1-6u^2+6u^3-u^6+|u\,(3-5u+3u^3-u^4)\cos 3n\alpha}{(1+u^3-2u|u\cos 3\alpha)^2}\,. \tag{20}$$

Aus (15) ersieht man, daß für alle Beanspruchungen der Walze durch $2n$-Kräfte P, abgesehen von $2n=2$, die Radialspannungen der Walze in Nähe der Achse, also für kleine u, sich den Werten $-2nP/(2\pi Rl)$ nähern und in der Achse mit diesen übereinstimmen, die den Werten entsprechen, die bei gleichmäßig verteilter Streckenlast p' wirken würden; während für $2n=2$ die Radialspannung den Wert $(-P/\pi Rl)(1+2\cos 2\alpha)$ erhält. Für die Tangentialspannungen ergibt bei Ausführung von (3) in analoger Weise

$$\sigma_t = \frac{nP}{\pi Rl}\,\frac{-1-4nu^{2n-1}+4nu^{2n}+u^4+2u^{n-1}(u-(n-1)u+nu^{2n}-(n+1)u^{2n+1})\cos 2n\alpha}{(1+u^{2n}-2u^n\cos 2n\alpha)^2}\,. \tag{21}$$

3. Verteilung der Radialspannungen bei achtfacher Kräftegruppe. Eine mit 8 Längseisen bewehrte umschnürte Säule wird einmal durch die Umschnürung selber, dann aber auch durch die 8 Längseisen seitlich gedrückt, wenn sie in der Längsrichtung belastet ist. Die vollständige Druckverteilung im Innern der Säule setzt sich daher aus verschiedenen Komponenten zusammen. Die Lösung für die Umschnürung ist von *L. Föppl*[1] gezeigt. Die Druckverteilung infolge des Druckes durch die 8 Längseisen kann genau genug durch die Wirkung von 8 kreissymmetrisch angeordneten Einzelkräften P bestimmt und berechnet werden, die die Säule radial beanspruchen.

Wir wenden daher (15) mit $n=4$ auf 8 Einzelkräfte P an, wo P die von einem Längseisen auf den Beton ausgeübte Druckkraft bedeutet, und erhalten die Radialspannung

$$\sigma_8 = -\frac{4P}{\pi Rl}\,\frac{1-16u^7+16u^8-u^{16}+2u^3(4-5u+4u^8-3u^9)\cos 8\alpha}{(1+u^8-2u^4\cos 8\alpha)^2}\,. \tag{22}$$

Hierin ist

$$A_8 = 1-16u^7+16u^8-u^{16},\ B_8 = 2u^3(4-5u+4u^8-3u^9),\ a_8 = 1+u^8,\ b_8 = 2u^4.$$

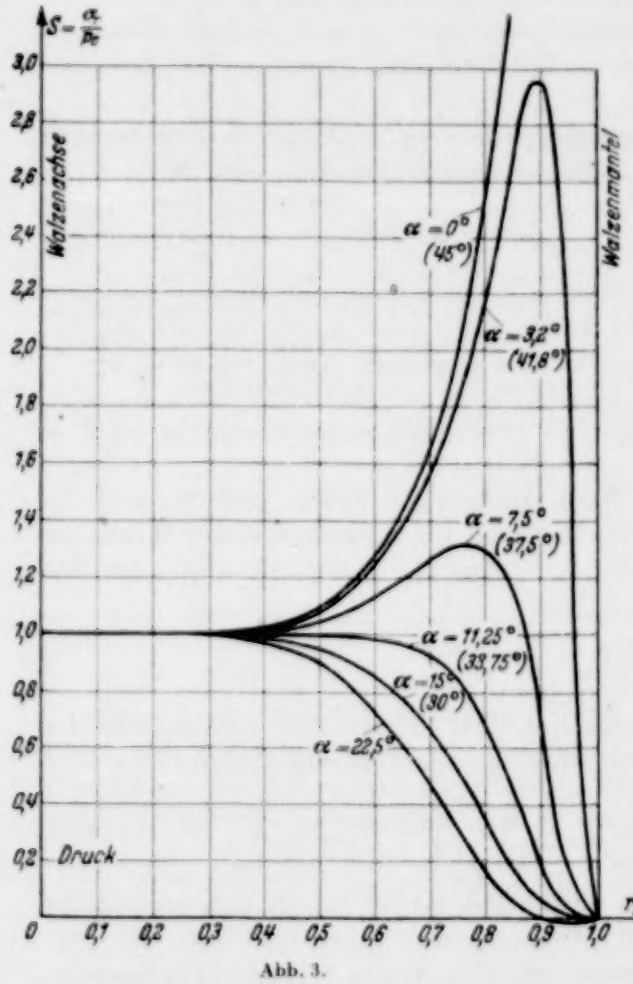


Abb. 3.

Für das Achteck beträgt der Teilungswinkel 45°; an den Stellen der Walze, wo die Längseisen liegen, wird $\alpha = 0°$, 45°, 90° usw. Aus Symmetriegründen braucht man den Verlauf der Spannungen nur zwischen 0° und 45° verfolgen, um sich ein Bild von der vollständigen Druckverteilung zu machen.

Um die Werte von σ_8 leicht aufstellen zu können, sind in der Tabelle 1 die Werte von A_8, B_8, a_8, b_8 abhängig von $u=(r/R)^2$ von $u=0$ bis $u=1$ in Abständen von 0,1 errechnet.

Tabelle 1

für die Berechnung der Werte von A_8, B_8, a_8, b_8.

u	r/R	A_8	B_8	a_8	b_8
0,0	0,000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000
0,1	0,316	1,0000	0,0070	1,0000	0,0002
0,2	0,447	0,9948	0,0480	1,0000	0,0032
0,3	0,548	0,9975	0,1351	1,0001	0,0162
0,4	0,632	0,9842	0,2562	1,0007	0,0512
0,5	0,707	0,9375	0,3774	1,0039	0,1250
0,6	0,775	0,8206	0,4480	1,0168	0,2592
0,7	0,837	0,6014	0,4181	1,0576	0,4802
0,8	0,894	0,3008	0,2749	1,1678	0,8192
0,9	0,949	0,0495	0,0869	1,4304	1,3122
1,0	1,000	0,0000	0,0000	2,0000	2,0000

[1] *L. Föppl*, a. a. O., Bd. 2, S. 141 bis 168.

In Abb. 3 ist nach (22) eine Kurvenschar mit dem Winkel α als variablen Parameter gezeigt, welche die Abhängigkeit der Radialspannung $S_8 = \sigma_8/p'$ von der Entfernung $r/R = \sqrt{u}$ darstellt. Wie zu ersehen, wird die Säule von der Achse bis nahe an der Oberfläche von Druckspannungen beansprucht, die von $r/R = 0$ bis $r/R = 1/3$ nur um Bruchteile eines Hundertstels und bis $r/R = 1/2$ um weniger als 10% vom mittleren Druck p' abweichen.

An den Stellen der Längseisen bzw. Druckkräfte P, also für $\alpha = 0°$ und $\alpha = 45°$, wachsen die Druckspannungen vom halben Halbmesser bis zur Oberfläche sehr stark an, wo sie theoretisch

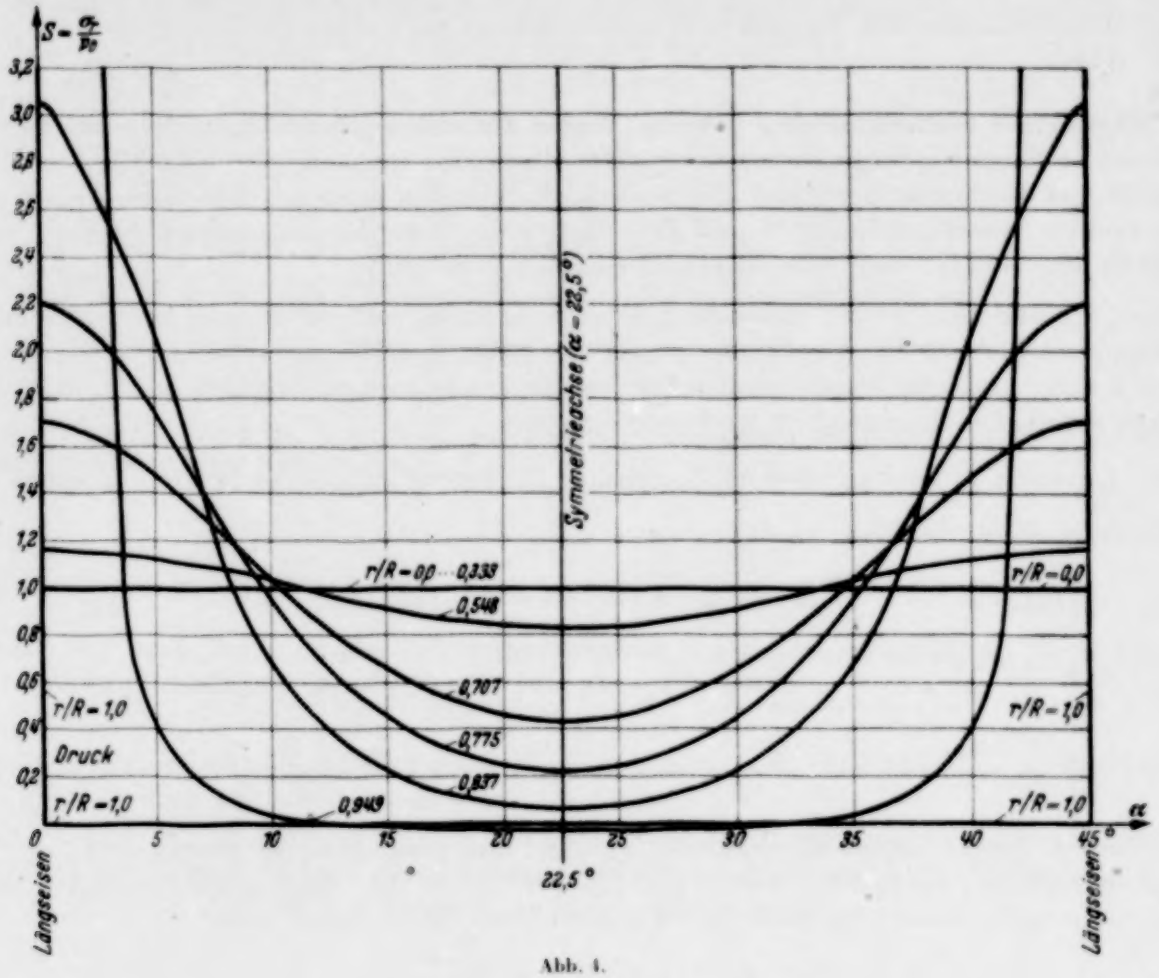


Abb. 4.

den Wert ∞ erreichen würden. In der Mitte zwischen zwei Kräften P, also für $\alpha = 22{,}5°$, erhält man die kleinsten Druckspannungen, die nahe der Oberfläche für $r/R = 0{,}9075$ den Wert Null erreichen und darüber hinaus in Zugspannungen übergehen, die selber bei weiterer Annäherung an die Oberfläche einen Höchstwert erreichen und schließlich an der Oberfläche entsprechend den Grenzbedingungen tangential in den Wert Null übergehen.

Der absolut größte Wert der Zugspannungen tritt in der Mitte zwischen zwei Kräften P für $\alpha = 22{,}5°$ auf, hat aber nur einen sehr kleinen Betrag; er liegt bei $r/R = 0{,}9381$ und ergibt sich zu

$$S_{max} = -\frac{\sigma_{max}}{p'} = -0{,}01455. \tag{23}$$

Allgemein findet man die Höchstwerte der Spannungen, wenn man die Ableitung der Spannungen bzw. von S_8 nach u gleich Null setzt, wobei man (22) benutzen kann. Man erkennt sofort, daß diese Bedingung für $u = 0$ und $u = 1$ erfüllt wird, so daß, wenn man von den Werten ∞ unter den Einzelkräften P an der Oberfläche absieht, sämtliche Kurven der Radialspannungen sich tangential dem mittleren Druck p' in der Säulenachse und dem Werte Null an der Oberfläche nähern.

In der Nähe der Längseisen von $\alpha = -11{,}25°$ bis $\alpha = +11{,}25°$ zeigen die Druckspannungen ausgeprägte Höchstwerte, deren absolute Beträge mit der Annäherung an die Einzelkraft P anwachsen, bis sie unter den Kräften P an der Oberfläche für $\alpha = 0°$ bzw. 45° theoretisch den Wert ∞ annehmen. Die Zugspannungen treten in der Säule im mittleren Bereich zwischen zwei Längseisen bei etwa $\alpha = 10{,}7°$ bis $34{,}3°$ auf.

In Abb. 4 sind die Spannungen $S_8 = -\sigma 8/p'$ als Funktionen des Winkels α aufgetragen, wobei jetzt r/R als variabler Parameter auftritt.

Für die Kurven mit den Parametern $r/R=0$ bis 0,333 sind die Schwankungen um die zur Abszissenachse parallele Achse $S_8=1$ so klein, daß in der Zeichnung die Kurven mit der Achse selber zusammenfallen, demnach für sämtliche Punkte sich nur unerheblich vom Werte 1 entfernen. Für $r/R=0{,}548$ sind die Schwankungen noch nicht sehr bedeutend; erst bei weiterer Erhöhung von r/R steigt die größte Druckspannung beträchtlich, während ebenso die kleinste absinkt. Für $r/R=0{,}9075$ sinkt die kleinste Druckspannung gerade bis Null an der Stelle, wo sie bei $\alpha=45°$ die Abszissenachse gerade berührt.

Sämtliche Druckkleinstwerte und dann folgende Zughöchstwerte liegen bei $\alpha=22{,}5°$, was aus der Differentiation von S_8 nach α aus (10) folgt; es wird dann $\sin 2n\alpha=0$, woraus $\alpha=180/8=22{,}5°$ folgt.

4. Allgemeiner mathematischer Beweis. Wegen Raummangels kann der folgende Beweis nur in verkürzter Form wiedergegeben werden. Der allgemeine mathematische Beweis der Gleichung (15) greift auf die Formeln (9) und (17) zurück, die aus den mechanischen Grundlagen, nämlich der Airyschen Spannungsfunktion und dem Gesetz der Überlagerung gewonnen sind, wobei (9) für gerade und (17) für ungerade Anzahl $2n$-Kräfte P gelten.

Bevor (9) und (17) weiter entwickelt werden können, soll ein allgemeiner mathematischer Satz abgeleitet werden, der sich für die folgenden Größen f ergibt; nur soll hier statt des doppelten Winkels 2α der einfache Winkel α eingeführt werden, was an dem Ergebnis nichts ändert, soweit der Phasenwinkel nicht geändert wird; wir setzen

$$f_1=\cos\alpha,\ f_2=\cos(\alpha-360/n),\ f_3=\cos(\alpha-2\cdot 360/n)\ \ldots\ f_n=\cos[\alpha-(n-1)360/n]. \tag{24}$$

Das Produkt dieser Größen ist dann

$$\Pi_n=f_1f_2f_3\ldots f_n=\frac{\cos n\alpha}{2^{n-1}},\ \text{wenn}\ n=\gamma\ \text{eine ungerade Zahl ist,} \tag{25}$$

$$\Pi_n=\frac{1-\cos n\alpha}{2^{n-1}},\qquad \text{wenn}\ n=4a\ \text{eine gerade, durch 4 teilbare Zahl ist,} \tag{26}$$

$$\Pi_n=\frac{-1-\cos n\alpha}{2^{n-1}}.\qquad \text{wenn}\ n=2r\ \text{eine gerade Zahl ist, deren Hälfte ungerade ist.} \tag{27}$$

Der Beweis dieses Satzes wird dadurch geführt, daß man einerseits das Produkt der n-Faktoren f, andererseits die rechten Seiten von (25) bis (27) in eine Reihe nach steigenden Potenzen von $f_1=\cos\alpha$ nach *Moivre* entwickelt; die gemeinsame Reihe lautet dann

$$\Pi_n=f_1^n-\gamma_2 f_1^{n-2}+\gamma_4 f_1^{n-4}-+\ldots. \tag{28}$$

Wir nehmen jetzt zwei zunächst willkürliche Größen a und b an und bilden die Ausdrücke

$$N_1=a-b f_1,\ N_2=a-b f_2,\ \ldots.\ N_n=a-b f_n.$$

Das Produkt dieser Größen läßt sich dann nach der folgenden Reihe entwickeln:

$$V_n=N_1N_2\ldots N_n=a^n-C_1a^{n-1}b+C_2a^{n-2}b^2-+\cdots\pm C_nb^n. \tag{29}$$

Hier bedeuten die Koeffizienten C_a die Summe der Kombinationen der n-Größen f zur a-ten Klasse.

Da a und b vollkommen willkürlich sind, können wir jetzt $a=f_1$ und $b=1$ setzen; dann muß das Produkt von (29) V_n wegen $N_1=0$ verschwinden, so daß

$$0=f_1^n-C_1f_1^{n-1}+C_2f_1^{n-2}-C_3f_1^{n-3}+-\cdots\pm C_n. \tag{30}$$

Der letzte Summand ist hier das durch (25) bis (28) dargestellte Produkt $C_n=\Pi_n$, so daß (28) und (30) übereinstimmen und wegen der Eindeutigkeit der Potenzentwicklung identisch sind. Es folgt hieraus durch Vergleich

$$C_1=C_2=C_3=\cdots=0. \tag{31}$$

Die Summe der Kombinationen der n-Elemente f zu einer ungeraden Klasse verschwindet, abgesehen von dem Produkt C_n.

Die Summe der Kombinationen der n-Elemente f zu einer geraden Klasse ist unabhängig von dem willkürlichen Winkel α, mit Ausnahme des Produktes $C_n=\Pi_n$, für welches (25) bis (27)

gelten; für die Berechnung der Summen der Kombinationen der n-Elemente f zur $2a$-ten Klasse erhält man die allgemeine Beziehung

$$C_{2a} = (-1)^a \gamma_{2a} = \frac{(-1)}{4^a} \frac{n}{n-a} \binom{n-a}{a}, \tag{32}$$

$$\text{mit } \gamma_2' = 4\gamma_2 = n, \quad \gamma_4' = 16\gamma_4 = \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}, \quad \gamma_6' = 64\gamma_6 = \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Nach den vorstehenden Sätzen läßt sich die nach Potenzen von a entwickelte rechte Seite von (29 in zwei Summanden trennen, von denen der erste F unabhängig von dem willkürlichen Winkel a ist, während der zweite $H \cos na$ von a abhängt; es wird

$$V_n = F - H \cos na. \tag{33}$$

Hierin wird mit Berücksichtigung von (25) bis (27)

$$H = \frac{b^n}{2^{n-1}} \tag{34}$$

und der von a unabhängige Teil F je nach der Natur von n

$$\left.\begin{aligned} F &= a^n - \gamma_2 a^{n-2} b^2 + \gamma_4 a^{n-4} b^4 - + \cdots \pm \gamma_{n-2} a\, b^{n-1} \text{ für ungerade } n = r, \\ F &= a^n - \gamma_2 a^{n-2} b^2 \quad \gamma_4 a^{n-4} b^4 - + \cdots \pm \frac{b^{n-2}}{2^{n-1}} \qquad \text{für } n = \begin{cases} 4a \\ 2r \end{cases} \end{aligned}\right| \tag{35}$$

Wir setzen jetzt $a = 1 + u^{2n}$, $b = 2u$, wo u eine beliebige Zahl bedeutet; dann ergibt sich für alle durch (35) gezeigten Fälle

$$F = 1 + u^{2n}, \tag{36}$$

$$b = 2u^n, \tag{37}$$

$$V_n = 1 + u^{2n} - 2u^n \cos na. \tag{38}$$

Der Beweis ist nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten geführt. Nach (35) wird

$$F = 1 + K_1 v + K_2 v^2 + K_3 v^3 + \ldots + v^n \quad \text{mit } v = u^2 = \left(\frac{r}{R}\right)^4. \tag{39}$$

Es läßt sich zeigen, daß für alle drei Fälle die Koeffizienten K verschwinden, so daß sich (36) ergibt. H erhält man unmittelbar aus (34).

Mit Berücksichtigung von (33) bis (38) kann die Größe der Radialspannung nach (15) aus dem Überlagerungsgesetz nach (9) durch Berechnung der Größen $\Sigma(1/N^2)$ und $\Sigma(f/N^2)$ abgeleitet werden.

Sind in (33) bis (35) a und b willkürlich, so findet man mit $V_n = V$

$$\sum \frac{1}{N^2} = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial a}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man weiter durch partielle Differentiation nach a bzw b, und wenn zur Abkürzung

$$F_a' = \frac{\partial F}{\partial a}, \quad Fb' = \frac{\partial F}{\partial b}, \quad Fab'' = \frac{\partial^2 F}{\partial a\, \partial b}, \quad Fa'' = \frac{\partial^2 F}{\partial a^2}, \quad H' = \frac{\partial H}{\partial b}$$

gesetzt wird,

$$V^2 \sum \frac{1}{N^2} = -\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial a}\right] = \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)^2 - V \frac{\partial^2 V}{\partial a^2} = (Fa')^2 - F\, Fa'' + H\, Fa'' \cos na, \tag{40}$$

$$V^2 \sum \frac{f}{N^2} = \frac{\partial}{\partial b}\left[\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial a}\right] = V\frac{\partial^2 V}{\partial a\, \partial b} - \frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial V}{\partial b} = F\, Fab'' - Fa'\, Fb' + (H'\, Fa' - H\, Fab'') \cos na. \tag{41}$$

Hierin lassen sich nun die Größen Fa', Fb', Fab'', Fa'', H' aus (35) ableiten und zu geschlossenen Ausdrücken umformen; man erhält

$$H' = n \frac{b^{n-1}}{2^{n-1}} = n\, u^{n-1}, \tag{42}$$

$$Fa' = n \frac{1 - v^n}{1 - v}, \tag{43}$$

$$u\, Fb' = n - F_a' = -n v \frac{1 - v^{n-1}}{1 - v}, \tag{44}$$

$$u\, F_{ab}' = \frac{-n}{(1-v)^3}\left[(n-2)\, v - n v^2 + n\, v^n - (n-2)\, v^{n+1}\right], \tag{45}$$

$$F_a'' = \frac{n}{(1-v)^3}\left[(n-1) - (n+1)\, v + (n+1)\, v^n - (n-1)\, v^{n+1}\right]. \tag{46}$$

Es ist jetzt möglich, die Größen $\Sigma(1/N^2)$ und $\Sigma(f/N^2)$ zu errechnen. Mit $M=(F_a')^2-F\,Fa''$ und $L=F\,F_{ab}''-F_aF_b'$ erhält man

$$\frac{M}{n}(1-v)^3=1+v-4nv^n+4nv^{n+1}-v^{2n}-v^{2n+1}, \tag{47}$$

$$\frac{L}{n}(1-v)^3=2v-2nv^n+2nv^{n+2}-2v^{2n+1}. \tag{48}$$

Setzt man schließlich die vorstehenden Ausdrücke in das Überlagerungsgesetz (9) ein, so erhält man nach einigen Umrechnungen

$$S_{2n}=\frac{A}{n}\sum\frac{1}{N^2}+\frac{B}{n}\sum\frac{f}{N^2}=\frac{1}{V^2}\left\{\frac{AM}{n}+\frac{BM}{n}+\left[\frac{H}{n}(AF_a''-BF_{ab}'')+BH'\frac{Fa'}{n}\right]\cos n\alpha\right\}$$
$$=\frac{1-4nu^{2n-1}+4nu^{2n}-u^4+2u^{n-1}\left[n-(n+1)u+nu^{2n}-(n-1)u^{2n+1}\right]\cos n\alpha}{(1+u^{2n}-2u^n\cos n\alpha)^2}, \tag{49}$$

also (15).

Es werde noch einmal darauf hingewiesen, daß in der mathematischen Betrachtung der einfache Winkel α als Argument des cos angesetzt ist, während im mechanischen Problem der Walzenberechnung der doppelte Winkel 2α erscheint. Setzt man von vornherein bei Bildung der Größen f wie beim mechanischen Problem den doppelten Winkel 2α an, ohne die Phasen der Kreiswinkel $\varphi=360/n$ zu ändern, so erhält man in (25) bis (27) und damit auch in den folgenden Gleichungen $\cos 2n\alpha$ ohne sonstige Änderungen. Denn bedeutet $2n$ eine gerade oder ungerade Zahl, so ist wegen $f=\cos 2(\alpha-360/2n)=\cos(2\alpha-360/n)$ die Phase $\varphi=360/n$, also dieselbe wie bei einfachem Winkel.

Für die Tangentialspannungen ergibt sich nach (3) dasselbe Bildungsgesetz (10) der Radialspannungen, nur daß statt der Konstanten A_{2n} und B_{2n} die Konstanten

$$C_{2n}=-1-4nu^{2n-1}+4nu^{2n}+u^{4n},\quad D_{2n}=2u^{n-1}\left[n-(n-1)u+nu^{2n}-(n+1)u^{2n+1}\right]$$

zu setzen sind; man erhält dann (21) für die Tangentialspannungen.

Für die Berechnung der Schubspannungen erhält man nach (4) durch Überlagerung

$$\tau_{2n}=2c(1-u)(1-u^2)\sum_0^{n-1}\frac{\sin(2\alpha-i\varphi)}{N_i^2}. \tag{50}$$

Die Summengröße erhält man aus der Beziehung

$$\sum_i\frac{\sin(2\alpha-i\varphi)}{N_i^2}=-\frac{1}{2b}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial\alpha}\right]=\frac{1}{2b}\frac{\partial}{\partial\alpha}\sum\frac{1}{N_i}. \tag{51}$$

Durch partielle Differentiation kommt nach Einsetzen in (50)

$$\tau_{2n}=-\frac{2n^2P}{\pi Rl}\frac{(1-u)(1-u^{2n})\sin 2n\alpha}{(1+u^{2n}-2u^n\cos 2n\alpha)^2}. \tag{52}$$

5. Zusammenfassung. Im vorstehenden wurde die Berechnung der Spannungen in einer Walze, die durch eine beliebige Anzahl kreissymmetrisch angeordneter Einzelkräfte gleicher Größe radial gedrückt wird, durchgeführt. Für die Spannungen ergaben sich die geschlossenen Ausdrücke

$$\sigma_r=p'\frac{A_{2n}+B_{2n}\cos 2n\alpha}{(a_{2n}-b_{2n}\cos 2n\alpha)^2},\quad \sigma_t=p'\frac{C_{2n}+D_{2n}\cos 2n\alpha}{(a_{2n}-b_{2n}\cos 2n\alpha)^2},\quad \tau=p'\frac{E\sin 2n\alpha}{(a_{2n}-b_{2n}\cos 2n\alpha)^2}.$$

(Eingegangen am 12. Oktober 1946.)

Die Dämpfung bei Wechselbeanspruchungen von vorbelasteten Drehstäben[1].

Von **O. Föppl** in Braunschweig.

1. Vorbemerkung[2]. Es gibt viele Fälle im Maschinenbau, in denen der Werkstoff einerseits durch eine Vorbeanspruchung und andererseits durch eine übergelagerte Schwingungsbeanspruchung beansprucht ist. Das trifft z. B. für Drehstabfedern zu, die im Kraftwagenbau vielfach verwendet werden, und die einerseits das Gewicht des Aufbaues auf das Fahrgestell zu übertragen haben und andererseits zusätzliche Stöße beim Überfahren von Schlaglöchern usw. aufnehmen. Die Spannung an der höchst beanspruchten Stelle setzt sich in diesem Fall aus zwei Teilen zusammen, nämlich der statischen Vorbeanspruchung τ_1 und der übergelagerten Wechselbeanspruchung $\pm\tau_2$.

Es ist wichtig für die Qualifikation des zur Herstellung der Verdrehungsfeder verwendeten Federstahls, welche Dämpfung mit dem Spannungswechsel innerhalb der Grenzen $\tau_1 - \tau_2$ und $\tau_1 + \tau_2$ verbunden ist. Die Dämpfung rührt von der plastischen Verformung her. Wenn aber plastische Verformungen bei Wechselbeanspruchungen auftreten, dann besteht die Gefahr, daß sich die plastischen Anteile teilweise addieren, wenn eine Vorlast die Richtung angibt, nach der die Summierung stattfinden kann. Im allgemeinen setzt sich deshalb eine Drehstabfeder um so rascher, je größer die Dämpfung des zur Herstellung der Feder verwendeten Stahls ist. Die Frage, bei welcher Spannung sich ein Werkstoff setzt, und insbesondere bei welcher Vorspannung τ_1 schon verhältnismäßig kleine übergelagerte Wechselbeanspruchungen $\pm\tau_2$ eine mit der Zeit fortschreitende Zunahme des übergelagerten Verdrehungswinkels φ_1 hervorrufen, ist für Federn fast ebenso wichtig wie die Frage nach der Dauerhaltbarkeit des Werkstoffes. Überdies ist die Dämpfung wichtig für die Aufschaukelung der Schwingungsausschläge, die bei im Takt der Eigenschwingungszahl auftretenden Stößen hervorgerufen werden können. Je stärker die Werkstoffdämpfung ist, desto weniger schaukeln sich Schwingungen auf, desto geringer ist die größte Beanspruchung in der Feder. Von dieser Seite her gesehen ist deshalb die Dämpfung gerade bei Federn nützlich. Dämpfung und Beanspruchung sind eng miteinander verknüpft.

2. Die verhältnismäßige Dämpfung bei reiner Schwingungsbeanspruchung. In theoretischen Betrachtungen ist früher gewöhnlich für wechselnde Schwingungsbeanspruchungen innerhalb der Grenzen $+\tau_0$ und $-\tau_0$ der Ansatz gemacht worden, daß die bei der Schwingung auftretende Dämpfungskraft verhältnisgleich mit der Geschwindigkeit anwachsen würde. Nach diesem Ansatz tritt die größte Dämpfung während einer Schwingung beim Durchlaufen der Mittellage auf, da in der Mittellage die Verformungsgeschwindigkeit am größten ist. Die Dämpfung, die bei kleinem Wert $\pm\tau_2$ und großem Wert τ_1 auftritt, müßte deshalb im Verhältnis zu den Dämpfungsbeträgen, die in der Mitte der Hysteresisschleife auftreten, klein sein.

Durch Versuchsergebnisse ist aber entgegen dem theoretischen Ansatz bewiesen worden, daß die Dämpfung in Wirklichkeit nicht (oder nur sehr wenig) von der Formänderungsgeschwindigkeit abhängig ist. Man erhält etwa gleiche Dämpfung, wenn man den Spannungswechsel bei Drehstabfedern aus Stahl innerhalb gleicher Grenzen $\pm\tau_0$ mit verschiedenen Wechselzahlen, d. h. mit verschiedenen Verformungsgeschwindigkeiten durchführt. Es folgt daraus, daß die Verformungsgeschwindigkeit keinen Einfluß auf die Dämpfung hat. Die Größe der Dämpfung hängt vielmehr bei Schwingungsbeanspruchungen innerhalb der Grenzen $\pm\tau_0$ allein vom Spannungsgrößtwert τ_0 ab.

Wir nehmen an, daß die Versuche an Stäben aus gleichem Werkstoff innerhalb verschiedener Belastungsgrenzen $\pm\tau_0$ durchgeführt werden. Dabei ist τ_0 der Spannungsgrößtwert, der während eines Spannungswechsels erreicht wird. Die Spannung soll sich sinusförmig mit der Frequenz a ändern, so daß zur Zeit t die Spannung $\tau = \tau_0 \sin a\,t$ ist. Man kann die verhältnismäßige Dämp-

[1] Vorgetragen auf der Ostertagung 1947 der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik in Karlsruhe durch Herrn *W. Oppelt*.

[2] Die nachfolgenden Ausführungen stützen sich auf Versuchsergebnisse, die mein früherer Mitarbeiter, Herr *G. Kougias*, Griechenland, auf einer von ihm im Wöhler-Institut ausgebildeten Verdrehungsmaschine erhalten hat.

fung für verschiedene Spannungshöchstwerte τ_0 bestimmen und die Abhängigkeit zwischen ψ und τ_0 darstellen durch $\psi = f(\tau_0)$. Der Wert ψ ist der Inhalt der Hysteresisschleife H, die bei einem vollen Lastwechsel im Spannungs-Dehnungsdiagramm durchlaufen wird, geteilt durch die Formänderungsarbeit F, die in der äußersten Schwingungslage im Werkstoffelement aufgespeichert ist (Abb. 1). Die Formänderungsarbeit F wächst verhältnisgleich mit τ_0^2 an. In den Fällen, in denen auch die Hysteresisfläche H verhältnisgleich mit τ_0^2 anwächst, ist ψ ein konstanter Wert.

Bei metallenen Werkstoffen wächst der Inhalt H der Hysteresisschleife im allgemeinen stärker an als verhältnisgleich mit τ_0^2, d. h. der Wert ψ wächst selbst mit τ_0 an. Es gibt aber Werkstoffe (z. B. Gummi, Grauguß, Holz usw.), bei denen ψ innerhalb gewisser Spannungsgrenzen ein angenähert konstanter Wert ist. Wir nehmen im nachfolgenden zunächst zwecks Vereinfachung der Aufgabe an, ψ sei auch für Stahl, auf den sich die Ausführungen beziehen, konstant ($=c$), H wachse also verhältnisgleich mit τ_0^2 an. Wir nehmen weiter an, daß der Wert $\psi = c$ für Spannungswechsel zwischen $\pm\tau_0 = \pm(\tau_1 + \tau_2)$ für die zu untersuchende Stahlsorte bekannt sei, und fragen, wie groß die verhältnismäßige Dämpfung ψ bei einer Wechselbeanspruchung zwischen den Grenzen $\tau_1 + \tau_2$ und $\tau_1 - \tau_2$ ist.

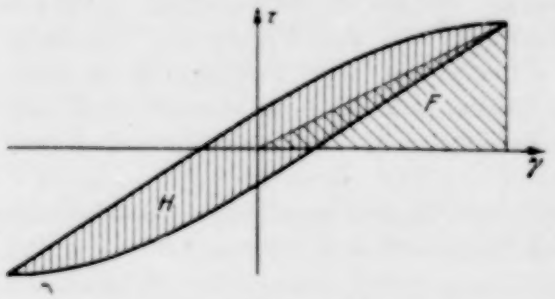


Abb. 1.

3. Die verhältnismäßige Dämpfung bei Wechselbeanspruchungen, die sich über eine Vorlast lagern. Die Drehstabfedern haben in der Praxis gewöhnlich eine Vorlast mit der Spannung τ_1 und eine übergelagerte Beanspruchung $\pm\tau_2$ auszuhalten. Die Vorlast ist konstant, die übergelagerte Belastung wird gewöhnlich durch Stöße hervorgerufen, die in ungewollter Weise von außen auf die Feder einwirken. Wenn diese Stöße ungefähr im Zeitmaß der Eigenschwingungszahl der Anordnung auftreten, dann hängt der Grad der Aufschaukelung der Schwingung wesentlich von der Dämpfung ab, die mit der übergelagerten Wechselbeanspruchung verbunden ist. Mit der Dämpfung der übergelagerten Schwingung hat man sich bisher, soviel mir bekannt ist, nicht befaßt. Man hat keine Feststellungen zu der Frage gemacht, wie man die Dämpfung bei übergelagerten Schwingungen etwa dann angeben kann, wenn die verhältnismäßige Dämpfung ψ_0 bekannt ist, die zum Belastungswechsel $\pm(\tau_1 + \tau_2)$ gehört. Es liegt nicht einmal eine Angabe vor, was man unter der verhältnismäßigen Dämpfung bei übergelagerten Schwingungen verstehen soll.

Es liegt nahe, die Dämpfung auch bei übergelagerten Schwingungen als verhältnismäßige Dämpfung ψ_w anzugeben und sie in Beziehung zu setzen zu der Dämpfung ψ_0, die bei reiner Schwingungsbeanspruchung innerhalb der äußersten Grenzen $\pm\tau_0 = \pm(\tau_1 + \tau_2)$ auftritt. In Abb. 2 sind die beiden Hysteresisschleifen aufgetragen, die zu den beiden Wechselbeanspruchungen $\pm(\tau_1 + \tau_2)$ und $\pm(\tau_1 - \tau_2)$ zugehören. Die äußersten Spitzen der beiden Hysteresisschleifen sind mit a und b bezeichnet. Bei der über die Vorbeanspruchung τ_1 gelagerten Schwingung $\pm\tau_2$ wird eine Hysteresisschleife durchlaufen, deren Flächeninhalt H_w man durch Versuche (siehe unten) feststellen kann. Der Flächeninhalt H_w ist, wie man sofort sieht, bei großen Vorbeanspruchungen τ_1 viel geringer als der Unterschied der beiden Hysteresisschleifen, die zu den Spannungswechseln $\pm(\tau_1 + \tau_2)$ und $\pm(\tau_1 - \tau_2)$ gehören.

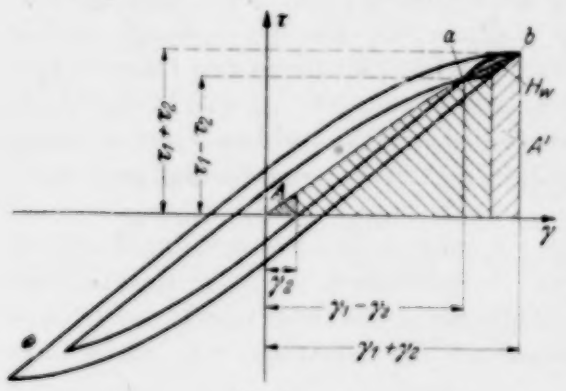


Abb. 2.

Um die Größe der Fläche H_w festzustellen, kann man durch Resonanzerregung eine Schwingung erzeugen und dabei eine Vorlast wirken lassen, die eine Spannung τ_1 hervorruft. Im Beharrungszustand wird die Arbeit gemessen, die zur Aufrechterhaltung der Schwingung zugefügt werden muß. Wenn das bei Resonanzerregung angreifende Moment mit $M = M_2 \sin \alpha t$ und der durch M hervorgerufene größte bzw. kleinste Verdrehungswinkel mit $\pm\varphi_2$ bezeichnet wird, ist die im Stab in Wärme umgesetzte Arbeit H_w je Schwingung gleich

$$H_w = \pi M_2 \varphi_2 . \qquad (1)$$

Wenn die Maschine bei der Durchführung der Versuche nicht in Resonanz betrieben werden kann, kann man die je Spannungswechsel zugeführte Energie auch aus der Erwärmung bestimmen, die der Drehstab erfährt.

Um die verhältnismäßige Dämpfung ψ_w zu erhalten, muß der Inhalt H_w der Hysteresisschleife durch die mit der übergelagerten Schwingung verbundene Formänderungsarbeit in der äußersten Schwingungslage geteilt werden. Es ist die Frage, zu welcher Formänderungsarbeit die Dämpfungsarbeit in diesem Fall ins Verhältnis gesetzt werden soll. Wir können unter der Formänderungsarbeit entweder die Arbeit A' (Abb. 2) verstehen, d. h. den Mehrbetrag an Formänderungsarbeit, der beim Auftragen der übergelagerten Schubspannung τ_2 im Stab aufgespeichert wird, oder wir können darunter den Betrag A verstehen, der zu der ohne Vorlast aufgetragenen Schubspannung τ_2 gehört. Diese Frage konnte nur durch Versuche beantwortet werden. Es hat sich als zweckmäßig herausgestellt, die zweite Definition zu wählen und unter der verhältnismäßigen Dämpfung ψ_w das Verhältnis des Inhalts der Hysteresisschleife bei der übergelagerten Schwingung zu derjenigen Formänderungsarbeit zu verstehen, die durch ein statisch aufgetragenes Moment M_2 geleistet wird, das ohne Vorlast wirkt und die Schubspannung τ_2 hervorruft. Wenn wir die verhältnismäßige Dämpfung ψ_w in dieser Weise definieren, dann ist ψ_w der Größenordnung nach ungefähr gleich der verhältnismäßigen Dämpfung ψ_0, die zur Wechselbeanspruchung innerhalb der Grenzen $\pm(\tau_1+\tau_2)$ zugehört. Der Ansatz kann nur Gültigkeit haben, wenn die Elastizitätsgrenze bei der Schwingung nur wenig überschritten oder die Dämpfungsschleife nur schmal ist. Solange keine besseren Meßergebnisse vorliegen, erhält man also H_w für einen auf Verdrehung beanspruchten Stab von Kreisquerschnitt zu

$$H_w = \psi_w A = \psi_0 \frac{V}{2} \frac{\tau_2^2}{2G}. \tag{2}$$

In dieser Gleichung ist V das Volumen des Verdrehungsstabes (Drehstabfeder), τ_2 der Höchstwert der übergelagerten Schubspannung, G der Gleitmodul und ψ_0 die verhältnismäßige Dämpfung, die zu einer wechselnden Beanspruchung innerhalb der Grenzen $\pm(\tau_1+\tau_2)$ gehört. H_w ist die Dämpfungsarbeit (in cm kg), die zur Aufrechterhaltung der Schwingung im Beharrungszustand nachgeliefert werden muß und deren Wert aus Moment und Verdrehungswinkel bei Resonanzerregung nach Gleichung (1) berechnet werden kann. In Gleichung (2) tritt das halbe Volumen $V/2$ auf, weil nur die am Rande des Querschnitts gelegenen Elemente bis zum Größtwert τ_2 beansprucht werden. Die in der Mitte gelegenen Elemente haben die Spannung Null und drücken deshalb den Mittelwert der Dämpfung herab. In Gleichung (1) und (2) sind alle Werte bekannt oder durch Versuche bestimmbar. Man kann mit Hilfe der Gleichung (2) nachprüfen, ob die Annahme $\psi_w = \psi_0$ berechtigt war oder durch eine bessere Annahme ersetzt werden sollte.

Solange der Wert ψ_0 als konstant, d. h. unabhängig von τ_0 angesehen wird, ist die Formänderungsarbeit H_w nach Gleichung (2) unabhängig von der Vorbeanspruchung τ_1. Der Wert τ_0 ist z. B. konstant für Gummi; die Dämpfungsarbeit H_w bei vorbelasteten Gummifedern kann deshalb nach Gleichung (2) berechnet werden. Bei Stäben aus Stahl ist ψ_0 selbst eine Funktion des Größtwertes der auftretenden Spannungen $(\tau_1+\tau_2)$. Bei kleinen Werten von $(\tau_1+\tau_2)$ ist ψ_0 Null, bei großen Werten von $(\tau_1+\tau_2)$ wächst ψ_0 rasch auf verhältnismäßig große Werte an. Wenn man diese Tatsache berücksichtigt, dann ist die Größe der Dämpfung bei der übergelagerten Schwingung nach Gleichung (2) nicht nur von τ_2, sondern auch von der Vorspannung τ_1 abhängig.

Wenn τ_1 gleich Null ist, dann ist ψ_0 die verhältnismäßige Dämpfung, die zur Wechselbeanspruchung $\pm\tau_2$ gehört; Gleichung (2) geht in diesem Fall in die Dämpfungsgleichung für reine Schwingungsbeanspruchung über. Wenn τ_2 klein ist gegenüber τ_1, dann ist die Dämpfung nach Gleichung (2) klein. Sie hängt bei Stahl von der Größe der Vorbeanspruchung τ_1 ab dadurch, daß der Wert ψ_0 in (2) mit τ_1 anwächst.

4. Kritische Bemerkungen. In Gleichung (2) ist die verhältnismäßige Dämpfung ψ_w eingesetzt, die zu einer übergelagerten Wechselbeanspruchung $\pm\tau_2$ gehört, wenn die verhältnismäßige Dämpfung ψ_0 in Abhängigkeit vom Größtwert $\pm(\tau_1+\tau_2)$ der Schwingungsbeanspruchung bekannt ist.

Die Dämpfung, die beim Durchlaufen der gesamten Hysteresisschleife nach Abb. 3 auftritt, setzt sich aus den Einzelbeträgen H zusammen, die bei der Belastung und der Entlastung geleistet werden. Um die Teilbeträge zu bestimmen, kann man die Hysteresisschleife $\tau = f(\gamma)$

nach Abb. 3 durch lotrechte Gerade in einzelne Teilstücke zerlegen, die oben von der Belastungskurve und unten von der Entlastungskurve begrenzt werden. Die Dämpfungsarbeit H_a, die in der Umgebung des größten Ausschlages in Wärme umgesetzt wird, ist durch eine etwa dreieckförmige Gestalt begrenzt, deren Basis gleich $\Delta\gamma_a$ ist. Beim Durchlaufen der Mittellage wird der Dämpfungsbetrag H_b angenähert durch ein Parallelogramm eingeschlossen, dessen Basis $\Delta\gamma_b$ in der Abb. 3. gleich $\Delta\gamma_a$ gezeichnet ist. Man sieht aus der Abbildung, daß der Flächeninhalt H_a der Hysteresisschleife, der zur Formänderung $\Delta\gamma_a$ gehört, wesentlich kleiner ist, als derjenige, der zu $\Delta\gamma_b$ gehört. Wenn man die Dämpfung analytisch darstellen will, muß man eine Funktion angeben, bei der die Hauptdämpfungsbeträge beim Durchlaufen des mittleren Teils des Formänderungsdiagramms auftreten.

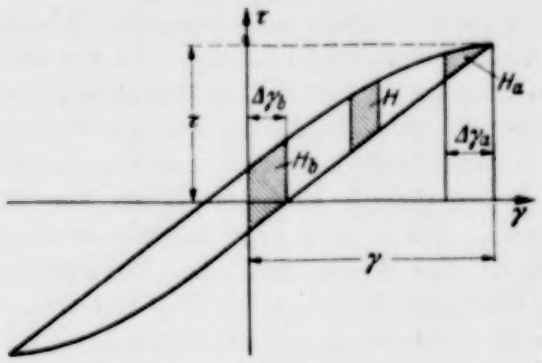


Abb. 3.

In der Mitte der Dämpfungsschleife ist die Formänderungsgeschwindigkeit bei der Schwingung am größten. Die oben angegebene Abhängigkeit des Dämpfungsbetrages (d. h. des Inhalts der verschiedenen Teilstücke der Dämpfungsschleife) vom Ausschlag γ kann man deshalb in der Weise darstellen, daß man die Dämpfungsbeträge an den verschiedenen Stellen der Hysteresisschleife verhältnisgleich der Geschwindigkeit setzt, die bei einer harmonischen Schwingung mit dem Größtausschlag γ_0 auftritt. In Wirklichkeit ist die Dämpfung aber nicht verhältnisgleich der Formänderungsgeschwindigkeit, worauf schon im Eingang hingewiesen ist. Der Ansatz, daß die Dämpfung verhältnisgleich mit der Formänderungsgeschwindigkeit anwachsen soll, ist nur dann berechtigt, wenn man die Abhängigkeit der in den einzelnen Abschnitten entstandenen Dämpfungsbeträge vom Ausschlag für eine bestimmte Hysteresisschleife analytisch darstellen will. Tatsächlich ist die Dämpfung, die in einem Teilstück auftritt, nicht von der Formänderungsgeschwindigkeit, sondern vom Spannungsunterschied abhängig, der zwischen der Be- und Entlastungskurve des Teilstückes durchlaufen wird. Da bei kleinen Schwingungen, die sich über eine entsprechend große Vorlast lagern, nur geringe Unterschiede in den Belastungsgrößt- und Kleinstwerten auftreten, ist die Dämpfung für diesen Fall trotz der großen Spannungswerte verhältnismäßig gering. Dieser Tatsache ist bei Aufstellung der Gleichung (2) Rechnung getragen worden.

Wenn man zu unendlich kleinen Teilstücken übergeht, ist die Dämpfungsarbeit gleich der Basisbreite $d\gamma$ des Teilstücks mal $\Delta\tau$, wobei $\Delta\tau$ der Unterschiedsbetrag ist, der der Hysteresisschleife bei der Be- und Entlastung zugehört. Hierbei ist $\Delta\tau$ vom Größtwert τ_0 der Spannung und von der Entfernung des betrachteten Teilstücks von der Extremlage abhängig. Wenn $\Delta\tau$ bei Veränderung von τ_0 verhältnisgleich τ_0 gesetzt wird (was z. B. für Gummi tatsächlich zutrifft), dann ist der Gesamtinhalt der Hysteresisschleife verhältnisgleich τ_0^2 oder die verhältnismäßige Dämpfung ψ konstant. Im mittleren Teil *b* ist die Formänderungsgeschwindigkeit, im äußeren Teil *a* ist die Spannung am größten. Der Größtwert der Dämpfung hängt weder von der Verformungsgeschwindigkeit noch von der Spannung, sondern vom Spannungsunterschied ab, der zwischen Belastungskurve und Entlastungskurve des Teilstücks *a* oder *b* durchlaufen wird. Das heißt: die verhältnismäßige Dämpfung ist in der Mitte der Hysteresisschleife am größten. Wenn sich der Wert ψ_w bei den Messungen als wesentlich größer als ψ_0 herausgestellt haben würde, dann hätte man daraus schließen müssen, daß die Hauptdämpfung beim Durchlaufen der Hysteresisschleife bei großen Formänderungen, d. h. beim Durchlaufen der großen Spannungswerte ausgelöst wird. Nach den Versuchswerten, die mein früherer Mitarbeiter, Herr *G. Kougias*, erhalten hat, ist das nicht der Fall. Nach dieser Richtung werden zur Zeit im Wöhler-Institut weitere Versuche angestellt.

(Eingegangen am 4. November 1946.)

Zum Beulproblem der anisotropen Rechteckplatte.

Von **A. Pflüger** in Hannover.

1. Einleitung. a) Aufgabenstellung. Das Beulproblem der orthogonal anisotropen Rechteckplatte ist bereits verschiedentlich behandelt worden[1]. Die in den bisherigen Veröffentlichungen untersuchte Art der Anisotropie ist jedoch nicht in allen Fällen dazu geeignet, die Verhältnisse zu erfassen, die im Stahl- oder Leichtmetallbau bei einem Blech mit Versteifungen vorliegen. Derartige Versteifungen sind, wie in Abb. 1 schematisch angedeutet, häufig nur auf einer Plattenseite, also unsymmetrisch zur Plattenmittelfläche angebracht. Da für diesen Fall der Unsymmetrie exakte Lösungen des Beulproblems anisotroper Platten nicht bekannt geworden sind[2], soll im folgenden eine derartige Lösung angegeben werden. Es werden zunächst die Differentialgleichungen und das zugehörige Variationsproblem für Belastung durch Druck und Schub aufgestellt. Für den praktisch wichtigen Fall der allseitig gelenkig gelagerten Rechteckplatte unter reiner Druckbeanspruchung wird sodann die Beullast explizit ausgerechnet und die entstehende Formel diskutiert.

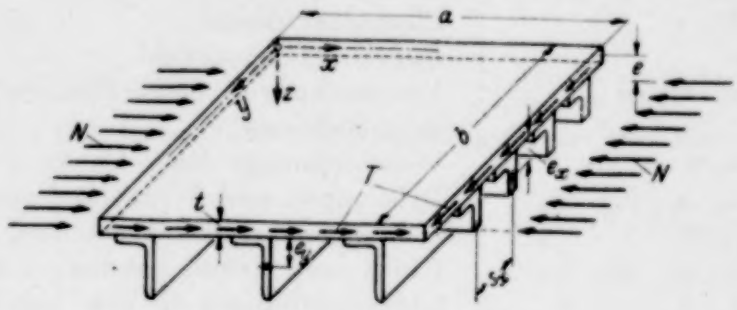


Abb. 1. Platte mit Längs- und Quersteifen.

Im einzelnen seien bei der Rechnung folgende Voraussetzungen gemacht. Es wird ein rechteckiges Plattenfeld betrachtet, das aus dem „Blech", einer isotropen homogenen Platte konstanter Dicke, und den darauf befestigten Scharen sich rechtwinklig kreuzender, parallel zu den Kanten des Feldes verlaufender Versteifungen besteht. Die Versteifungen einer Schar sind unter sich völlig gleich und haben konstanten Abstand voneinander, der hinreichend gering ist, so daß die Behandlung des Systems als anisotrope Platte gerechtfertigt ist. Für den Spannungs- und Verformungszustand des Bleches sollen die bekannten, für dünne Platten üblichen Voraussetzungen gelten, also im wesentlichen die Vernachlässigung der Spannungen senkrecht zur Mittelfläche und die Erhaltung der Normalen zur Mittelfläche bei der Verformung. Die Versteifungen werden wie biegungsfeste, aber völlig verdrehweiche[3] Stäbe behandelt, deren Querschnitte bei der Verformung nicht nur eben, sondern auch senkrecht zur verformten Stabachse bleiben (Vernachlässigung der Schubverformungen). An den Kreuzungsstellen der Versteifungen sollen keinerlei Momente von der einen auf die andere Versteifung übertragen werden können. Wenn also die Blechdicke nach Null geht, so entsteht ein Trägerrost, bei dem die eine Trägerschar auf die andere nur lotrechte Kräfte überträgt. Die äußeren Fasern des Bleches und der Versteifungen, die miteinander in Berührung stehen, sollen die gleichen Dehnungen erfahren. Eine Nachgiebigkeit der Verbindung zwischen Blech und Versteifungen wird also ausgeschlossen. Die Belastung der Platte möge, wie aus Abb. 1 hervorgeht, im nicht ausgebeulten Grundzustand aus den gleichförmig verteilten Schubkräften T und den Längskräften N bestehen. Die Schubkräfte greifen in der Mittelfläche des Bleches an, während die Längskräfte in einer Ebene wirken, die von der Mittelfläche einen gewissen Abstand hat, über den weiter unten noch verfügt wird.

b) Bezeichnungen. Es seien folgende Bezeichnungen eingeführt (vgl. hierzu Abb. 1):

x, y, z Koordinaten zur Beschreibung der unverformten Platte. Die (x, y)-Ebene fällt mit der Mittelfläche des Bleches zusammen,

$\frac{\partial(\ldots)}{\partial x} = (\ldots)', \quad \frac{\partial(\ldots)}{\partial y} = (\ldots)^{\cdot}$,

[1] Vgl. *S. Timoshenko*, Theory of elastic stability, New York und London 1936, S. 380 und 384. Dort finden sich auch weitere Literaturhinweise.

[2] Untersuchungen über die Wirkung einer einseitig angeordneten Einzelsteife auf einer isotropen Platte bei Schubbeanspruchung finden sich bei *E. Chwalla* und *A. Nowak*, Stahlbau 10 (1937), S. 73, und zeigen den großen Einfluß einer unsymmetrischen Steifenanordnung.

[3] Eine Berücksichtigung der Verdrehsteifigkeit bereitet grundsätzlich keine Schwierigkeiten, erweist sich jedoch für die meisten praktischen Verhältnisse als überflüssig.

a, b — Seitenlängen der Platte,
t — Dicke des Bleches,
F_x, F_y — Querschnittsflächen der in x-Richtung bzw. y-Richtung liegenden Versteifungsschar je Längeneinheit der y- bzw. x-Achse,
I_x, I_y — auf die Längeneinheit der y- bzw. x-Achse bezogene axiale Trägheitsmomente der Querschnittsflächen der Versteifungen,
e_x, e_y — Schwerpunktsabstände der Querschnitte der Versteifungen von der Blechunterfläche,
s_x — Abstand zweier in x-Richtung liegender Versteifungen.

$S_x^* = F_x\left(e_x + \frac{t}{2}\right)$
$S_y^* = F_y\left(e_y + \frac{t}{2}\right)$
$I_x^* = I_x + F_x\left(e_x + \frac{t}{2}\right)^2$
$I_y^* = I_y + F_y\left(e_y + \frac{t}{2}\right)^2$
— auf die Längeneinheit bezogene statische Momente bzw. Trägheitsmomente der Querschnittsflächen der Versteifungen in bezug auf die Mittelfläche,

E — Elastizitätsmodul,
μ — Querkontraktionszahl,
u_z, v_z, w_z — Verschiebungen eines Punktes im Abstand z von der Mittelfläche in x-, y-, z-Richtung,
u, v, w — Verschiebungen eines Punktes der Mittelfläche, also für $z = 0$,
ε_x, ε_y, γ_{xy} — Dehnungen und Winkeländerung im Blech,
$\bar{\varepsilon}_x$, $\bar{\varepsilon}_y$ — Dehnungen in den Versteifungen,
σ_x, σ_y, τ_{xy}, τ_{yx} — Längs- und Schubspannungen im Blech,
$\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$ — Längsspannungen in den Versteifungen
(die Bezeichnungen und die Wahl des Vorzeichens der Spannungs- und Dehnungsgrößen entsprechen den üblichen Festsetzungen),
N_x, N_y — Längskräfte in der gesamten Platte (Blech mit Versteifungen) in x- bzw. y-Richtung je Längeneinheit der y- bzw. x-Achse,
T_x, T_y — Schubkräfte,
Q_x, Q_y — Querkräfte,
M_x, M_y — Biegemomente,
D_x, D_y — Drehmomente,
(Richtung und Vorzeichen der Plattenschnittkräfte gehen aus Abb. 2 hervor),
N — in x-Richtung wirkende Druckkraft des Grundzustandes,
T — Schubkraft im Grundzustand,
e — Abstand der Längskräfte N von der Mittelfläche,
$\sigma = \frac{N}{t + F_x}$ — mittlere Längsspannung im Grundzustand,
$\tau = \frac{T}{t}$ — Schubspannung im Grundzustand.

Schließlich seien noch die folgenden dimensionslosen Abkürzungen eingeführt:

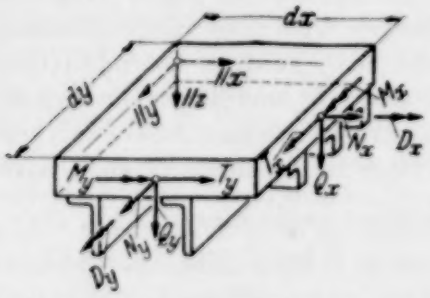


Abb. 2. Schnittkräfte am Plattenelement.

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad \eta = \frac{e}{b}, \quad \vartheta = \frac{t + F_x}{b}, \quad \varrho = \frac{t}{t + F_x}, \quad \omega_x = \frac{t + (1-\mu^2) F_x}{t + F_x},$$

$$\omega_y = \frac{t + (1-\mu^2) F_y}{t + F_x}, \quad \varphi_x = \frac{S_x^*}{(t + F_x)^3}, \quad \varphi_y = \frac{S_y^*}{(t + F_x)^2},$$

$$\lambda_x = \frac{t^3 + 12(1-\mu^2) J_x^*}{(t + F_x)^3}, \quad \lambda_y = \frac{t^3 + 12(1-\mu^2) J_y^*}{(t + F_x)^3},$$

$$g = e_x \sqrt{\frac{F_x}{J_x}}, \quad h = \frac{J_x}{t F_x^2}, \quad k = \frac{\sigma 12(1-\mu^2)}{E \pi^2 \vartheta^2}.$$

2. Ableitung der Differentialgleichung. a) Beziehungen zwischen Schnittkräften und Verschiebungen. Es seien zunächst bei Beschränkung auf lineare Glieder der Verschiebungen die Beziehungen zwischen den Schnittkräften und den Verschiebungen u, v, w der Mittelfläche gesucht. Unter u, v, w werden dabei die Verschiebungen vom unverformten spannungslosen Zustand aus verstanden. Die Schnittkräfte der Platte setzen sich, wie folgt, aus den Spannungen im Blech und den Versteifungen zusammen. Dabei sind dF_x und dF_y die Elemente der Flächen F_x und F_y.

$$N_x = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_x \, dz + \int_{(F_x)} \overline{\sigma}_x \, dF_x , \qquad N_y = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_y \, dz + \int_{(F_y)} \overline{\sigma}_y \, dF_y . \tag{1a, b}$$

$$T_x = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xy} \, dz = T_y \ (\text{da } \tau_{xy} = \tau_{yx}) , \qquad M_x = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_x \, z \, dz + \int_{(F_x)} \overline{\sigma}_x \, z \, dF_x , \tag{1c, d}$$

$$M_y = - \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_y \, z \, dz - \int_{(F_y)} \overline{\sigma}_y \, z \, dF_y , \qquad D_x = - \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xy} \, z \, dz = - D_y . \tag{1e, f}$$

Das Hookesche Gesetz lautet für die Spannungen im Blech

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) , \qquad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) , \qquad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} . \tag{2a bis c}$$

und für die Spannungen in den Versteifungen

$$\overline{\sigma}_x = E \, \overline{\varepsilon}_x , \qquad \overline{\sigma}_y = E \, \overline{\varepsilon}_y . \tag{2d, e}$$

Die Dehnungen und die Winkeländerung lassen sich ferner folgendermaßen durch die Verschiebungen ausdrücken. Im Blech:

$$\varepsilon_x = u_z' , \qquad \varepsilon_y = v_z^{\cdot} , \qquad \gamma_{xy} = u_z^{\cdot} + v_z' , \tag{3a bis c}$$

und genau so in den Versteifungen:

$$\overline{\varepsilon}_x = u_z' , \qquad \overline{\varepsilon}_y = v_z^{\cdot} . \tag{3d, e}$$

Zwischen den Verschiebungen im Abstand z und den Verschiebungen der Mittelfläche bestehen schließlich die Beziehungen

$$u_z = u - z \, w' , \qquad v_z = v - z \, w^{\cdot} , \qquad w_z = w . \tag{4a bis c}$$

Setzt man der Reihe nach (4) in (3), (3) in (2) und (2) in (1) ein und wertet die Integrale aus, so erhält man zwischen den Schnittkräften und den Verschiebungen der Mittelfläche die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}
N_x &= \frac{Et}{1-\mu^2} (u' + \mu v^{\cdot}) + E (F_x u' - S_x^{\bullet} w'') , \\
N_y &= \frac{Et}{1-\mu^2} (v^{\cdot} + \mu u') + E (F_y v^{\cdot} - S_y^{\bullet} w^{\cdot\cdot}) , \\
T_x &= T_y = \frac{Et}{2(1+\mu)} (u^{\cdot} + v') , \\
M_x &= - \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} (w'' + \mu w^{\cdot\cdot}) + E (S_x^{\bullet} u' - J_x^{\bullet} w'') , \\
M_y &= \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} (w^{\cdot\cdot} + \mu w'') - E (S_y^{\bullet} v^{\cdot} - J_y^{\bullet} w^{\cdot\cdot}) , \\
D_x &= - D_y = \frac{Et^3}{12(1+\mu)} w^{\cdot} .
\end{aligned}\right\} \tag{5a bis f}$$

Damit ist das Elastizitätsgesetz für die Schnittkräfte gewonnen. Die Querkräfte Q_x und Q_y sind darin nicht enthalten, weil die Querkraftverformungen vernachlässigt worden sind. Die bekannten, für die isotrope Platte gültigen Gleichungen erhält man, wenn man alle von den Versteifungen herrührenden Glieder streicht.

b) Grundzustand. Die Gleichgewichtsbedingungen für die am unverformt gedachten Plattenelement angreifenden Kräfte lassen sich ohne Schwierigkeiten aus Abb. 2 ablesen. Man erhält nach Division aller Gleichungen durch $dx\,dy$

$$\left.\begin{aligned}
N_x' + T_y^{\cdot} = 0 , \qquad N_y^{\cdot} + T_x' = 0 , \qquad Q_x' + Q_y^{\cdot} = 0 , \\
D_x' + M_y^{\cdot} + Q_y = 0 , \qquad D_y^{\cdot} + M_x' - Q_x = 0 .
\end{aligned}\right\} \tag{6a bis e}$$

Die ersten drei Gleichungen bringen das Kräftegleichgewicht in x-, y-, z-Richtung zum Ausdruck, während die Gleichungen (6d) und (6e) das Momentengleichgewicht um die x- bzw.

y-Achse festlegen. Das Gleichgewicht um die z-Achse ist von selbst durch die Gleichheit der Schubkräfte T_x und T_y gesichert.

Die Gleichungen (6) ermöglichen es nun, zusammen mit den Beziehungen (5) den für das nicht ausgebeulte Blech gültigen Grundzustand genau festzulegen. Die Belastung durch Druck- und Schubkräfte sei jede für sich betrachtet und zunächst nur die reine Druckbeanspruchung untersucht. Die Gleichgewichtsbedingungen (6) lassen sich für diesen Fall, wie man leicht bestätigt, befriedigen durch

$$N_x = -N = \text{konst.}, \quad M_x = -N e = \text{konst.}, \quad N_y,\ M_y,\ T_x,\ T_y,\ D_x,\ D_y = 0.$$

Für die Verschiebungen kann verlangt werden, daß

$$w'',\ u^{\cdot},\ v' = 0$$

ist. Man bekommt damit aus (5)

$$-N = \frac{Et}{1-\mu^2}(u' + \mu v^{\cdot}) + E F_x u',$$

$$0 = \frac{Et}{1-\mu^2}(v^{\cdot} + \mu u') + E(F_y v^{\cdot} - S_y^{*} w''),$$

$$M_x = -\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}\mu w'' + E S_x^{*} u',$$

$$0 = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} w'' - E(S_y^{*} v^{\cdot} - J_y^{*} w'').$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen $v^{\cdot}$ und w'', so erhält man

$$N = -\left\{\frac{t}{1-\mu^2}\left[1 - \frac{\mu^2 t}{t + (1-\mu^2)\left(F_y - \dfrac{S_y^{*2}}{\dfrac{t^3}{12(1-\mu^2)} + J_y^{*}}\right)}\right] + F_x\right\} E u',$$

$$M_x = \left[S_x^{*} + \frac{\dfrac{t^3}{12(1-\mu^2)}}{\dfrac{t^3}{12(1-\mu^2)} + J_y^{*}} \cdot \frac{\mu^2 t S_y^{*}}{t + (1-\mu^2)\left(F_y - \dfrac{S_y^{*2}}{\dfrac{t^3}{12(1-\mu^2)} + J_y^{*}}\right)}\right] E u'.$$

Damit ergibt sich für den Abstand $e = -\dfrac{M_x}{N}$, in dem die Längskräfte N wirken,

$$e = \frac{S_x^{*} + \dfrac{\dfrac{t^3}{12(1-\mu^2)}}{\dfrac{t^3}{12(1-\mu^2)} + J_y^{*}} \cdot \dfrac{\mu^2 t S_y^{*}}{t + (1-\mu^2)\left(F_y - \dfrac{S_y^{*2}}{\dfrac{t^3}{12(1-\mu^2)} + J_y^{*}}\right)}}{\dfrac{t}{1-\mu^2}\left[1 - \dfrac{\mu^2 t}{t + (1-\mu^2)\left(F_y - \dfrac{S_y^{*2}}{\dfrac{t^3}{12(1-\mu^2)} + J_y^{*}}\right)}\right] + F_x}. \tag{7}$$

Man erkennt aus (7), daß die Längskräfte N nicht, wie wohl zu erwarten gewesen wäre, in der Ebene wirken, in der bei Schnitten senkrecht zur x-Achse die Schwerpunkte des gesamten aus Blech und Versteifungen bestehenden Plattenquerschnitts liegen, d. h. in der neutralen Ebene der in x-Richtung als Stab aufgefaßten Platte. Der Unterschied ist jedoch gering. Den erwarteten Wert für e bekommt man nämlich schon, wenn man $\mu^2 \approx 0$ setzt. Es wird dann

$$N \approx -(t + F_x) u', \quad M_x \approx S_x^{*} E u' \quad \text{und} \quad e \approx \frac{S_x^{*}}{t + F_x}.$$

Praktisch wird man diese Näherungswerte fast immer verwenden können. Sie werden übrigens auch dann exakt richtig, wenn in y-Richtung keine Versteifungen vorhanden sind. Bemerkenswert ist noch, daß bei dem vorliegenden Grundzustand außer $v^{\cdot}$ auch die Krümmung w'' nicht verschwindet. Dieses ist durch die im Blech und in den Versteifungen verschiedenartige Wirkung der Querkontraktion zu erklären. Bei der Druckbeanspruchung der Platte in x-Richtung erfährt

das Blech eine Zusammendrückung, die in y-Richtung eine Querdehnung zur Folge hat. Diese Querdehnung tritt jedoch nur im Blech, aber nicht in den Versteifungen auf, wodurch eine positive Krümmung w'' des Bleches in der (y, z)-Ebene hervorgerufen wird, bei der das Blech gedehnt wird und die unteren Fasern der in y-Richtung liegenden Versteifungen gestaucht werden.

Über den bei reiner Schubbelastung auftretenden Grundzustand ist wenig zu sagen. Die Gleichgewichtsbedingungen werden befriedigt durch

$$T_x = T_y = T = \text{konst.},$$
$$N_x,\ N_y,\ M_x,\ M_y,\ D_x,\ D_y = 0,$$

und die Gleichungen (5) durch

$$u^{\cdot} + v' = \frac{2\,(1+\mu)}{E\,t}\,, \qquad u',\ v^{\cdot},\ w = 0\,.$$

Durch die Schubkräfte entstehen nur Spannungen im Blech; die Versteifungen werden nicht beansprucht.

c) Gleichgewicht am verformten Element. Bei Stabilitätsuntersuchungen muß in den Gleichgewichtsbedingungen der Einfluß der Verformung bei den schon im Grundzustand vorhandenen Kräften berücksichtigt werden. Die Gleichungen (6) bedürfen also zur Aufstellung der Beulbedingung noch einer Ergänzung. Bisher waren unter u, v, w und N_x, N_y, usw. die vom spannungslosen Zustand aus auftretenden Verschiebungen bzw. Schnittkräfte verstanden worden.

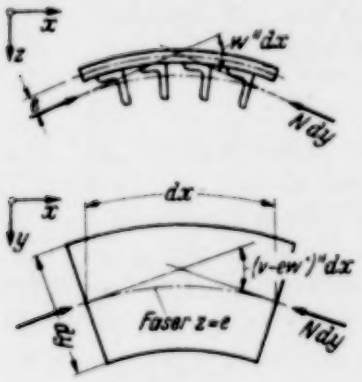


Abb. 3. Gekrümmtes Plattenelement mit den Längskräften des Grundzustandes.

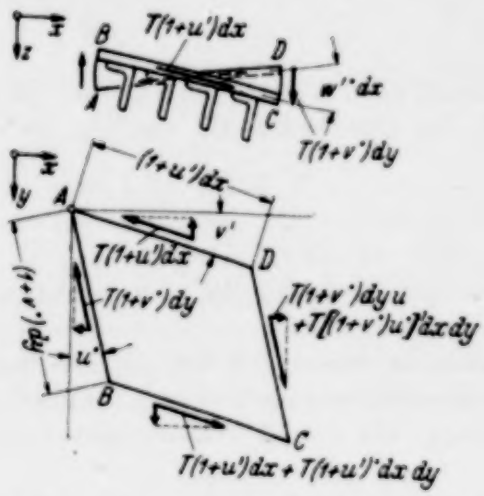


Abb. 4. Schubkräfte des Grundzustandes am verformten Element.

Von jetzt ab sollen diese Größen die zusätzlich beim Ausbeulen auftretenden Verformungen und Schnittkräfte bedeuten, während die Verformungen des Grundzustandes in üblicher Weise vernachlässigt werden. Die Gleichungen (6) stellen dann den Beitrag der zusätzlichen Schnittkräfte zum Gleichgewicht dar, und es fehlen nur noch die durch die Verformung verursachten Anteile der Kräfte des Grundzustandes.

Die Beeinflussung der Längskräfte N durch die Verformung geht aus Abb. 3 hervor, in der ein Plattenelement im Grund- und Aufriß mit den Krümmungen der Faser $z = e$, in der die Längskräfte wirken, dargestellt ist.

Die Kräfte N haben nach dem Ausbeulen die Kontingenzwinkel $(v - e\,w^{\cdot})''dx$ und $w''\,dx$, so daß sie zum Gleichgewicht in y-Richtung den Beitrag $-N(v'' - e\,w'^{\cdot})dx\,dy$ und in z-Richtung den Beitrag $-N\,w''\,dx\,dy$ leisten. Der erstgenannte Anteil liefert außerdem noch für die Momentengleichgewichtsbedingung um die x-Achse ein Glied $N\,e(v'' - e\,w'^{\cdot})dx\,dy$.

Abb. 4 zeigt das Verhalten der Schubkräfte bei der Verformung. Hierbei ist zunächst zu beachten, daß die Dehnung der Kantenlängen des Elementes mit in Rechnung gestellt werden muß und die Schubkräfte als Kräfte je Längeneinheit der verzerrten Kantenlängen definiert werden. Es wirkt also längs der Kante AD die Kraft $T(1+u')dx$, und längs der Kante AB die Kraft $T(1+v^{\cdot})dy$. Das Momentengleichgewicht um die z-Achse bleibt danach auch am verformten Element gesichert, worauf bekanntlich bei allen Beulproblemen besonders zu achten ist, bei denen der Grundzustand Schubkräfte enthält. In x-Richtung entstehen durch die Verformung zwei Beiträge zur Gleichgewichtsbedingung. Erstens kommt der

Zuwachs in Betracht, den die Schubkraft am Rand BC gegenüber der Kraft am Rand AD erfährt. Dieser ist

$$T(1+u')^{\cdot}dx\,dy = T u^{\cdot\cdot}\,dx\,dy.$$

Zweitens haben aber auch noch die an den Kanten AB und CD angreifenden Kräfte infolge der Winkeländerung $u^{\cdot}$ eine Komponente in x-Richtung, deren Unterschied mit in die Gleichgewichtsbedingung eingeht. Man erhält hierfür

$$T[(1+v^{\cdot})u^{\cdot}]'dx\,dy = T u^{\cdot\cdot}\,dx\,dy,$$

also einen Beitrag, der genau so groß wie der erste ist. Ganz entsprechend findet man für die y-Richtung den Beitrag $2\,T\,v^{\cdot\cdot}\,dx\,dy$ zur Gleichgewichtsbedingung. Für die z-Richtung ist schließlich die Verwindung $w^{\cdot\cdot}$ des Elementes maßgebend. Hier ergibt sich der von der Theorie der isotropen Platte her bekannte Anteil $2\,T\,w^{\cdot\cdot}\,dx\,dy$.

Damit sind alle erforderlichen Ergänzungen zu den Gleichungen (6) gefunden. Die vollständigen Gleichgewichtsbedingungen für die ausgebeulte Platte lauten nunmehr

$$\left.\begin{aligned}
&N_x' + T_y^{\cdot} + 2\,T u^{\cdot\cdot} = 0,\\
&N_y^{\cdot} + T_x' - N(v'' - e w''') + 2\,T v^{\cdot\cdot} = 0,\\
&Q_x' + Q_y^{\cdot} - N w'' + 2\,T w^{\cdot\cdot} = 0,\\
&D_x' + M_y^{\cdot} + Q_y + N e (v'' - e w''') = 0,\\
&D_y^{\cdot} + M_x' - Q_x = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(8a bis e)}$$

d) Differentialgleichungen und Variationsproblem. Eliminiert man zunächst aus (8) die Querkräfte Q_x und Q_y, so verbleiben die drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&N_x' + T_y^{\cdot} + 2\,T_0 u^{\cdot\cdot} = 0\\
&N_y^{\cdot} + T_x' - N(v'' - e w''') + 2\,T v^{\cdot\cdot} = 0,\\
&D_y^{\cdot\cdot} + M_x'' - D_x^{\cdot\cdot} - M_y'' - N(w'' + e v''' - e^2 w'''') + 2\,T w^{\cdot\cdot} = 0.
\end{aligned}\right| \qquad \text{(9a bis c)}$$

Setzt man in diese Gleichungen die Beziehungen (5) ein und benutzt die in Abschnitt 1b angegebenen abkürzenden Bezeichnungen ω_x, ω_y usw., so erhält man die gesuchten Differentialgleichungen für die Verschiebungen u, v, w

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_x u'' + \frac{1-\mu}{2}\varrho\,u^{\cdot\cdot} + \frac{1+\mu}{2}\varrho\,v^{\cdot\cdot} - (1-\mu^2)\,q_x\,\vartheta\,b\,w''' + 2\,\frac{1-\mu^2}{E}\varrho\,\tau\,u^{\cdot\cdot} = 0,\\
&\omega_y v^{\cdot\cdot} + \frac{1-\mu}{2}\varrho\,v'' + \frac{1+\mu}{2}\varrho\,u^{\cdot\cdot} - (1-\mu^2)\,q_y\,\vartheta\,b\,w^{\cdot\cdot\cdot} - \frac{1-\mu^2}{E}\left[\sigma(v'' - \eta\,b\,w''') - 2\varrho\,\tau\,v^{\cdot\cdot}\right] = 0,\\
&(1-\mu^2)\,q_x\,\vartheta\,b\,u''' + (1-\mu^2)\,q_y\,\vartheta\,b\,v^{\cdot\cdot\cdot} - \frac{\vartheta^2 b^2}{12}(\lambda_x w'''' + 2\,\varrho^3 w''^{\cdot\cdot} + \lambda_y w^{\cdot\cdot\cdot\cdot}) - \frac{1-\mu^2}{E}\left[\sigma(w'' + \eta\,b\,v''^{\cdot} - \eta^2 b^2 w''''^{\cdot\cdot}) - 2\,\varrho\,\tau\,w^{\cdot\cdot}\right] = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(10a bis c)}$$

Sind die Versteifungen auf beiden Seiten des Bleches angeordnet, oder fehlen sie ganz, so fällt die Unsymmetrie zur Mittelfläche fort und es werden die Größen q_x, q_y und η zu Null. Die Gleichungen (10) zerfallen dann insofern, als in (10a) und (10b) nur die Veränderlichen u und v und in (10c) nur noch w vorkommen. Die ersten beiden Gleichungen haben dabei die Lösung $u = v = 0$, so daß lediglich eine Gleichung für w übrig bleibt. Dieses Ergebnis wird bei Beuluntersuchungen an Platten im allgemeinen gleich vorweg genommen und nur die Durchbiegung w untersucht. Sobald jedoch die Versteifungen unsymmetrisch angeordnet sind, tritt im allgemeinen kein Zerfall der Gleichungen (10) ein. Das bedeutet, daß es nun keine „neutrale Ebene" mehr gibt, deren Fasern keine Dehnungen und deren Elemente keine Winkeländerungen beim Ausbeulen erfahren. Auch die anschaulich naheliegende Vermutung, daß es für die Biegung durch M_x- und M_y-Momente je für sich eine neutrale Ebene gibt, die durch die neutralen Fasern der in x- bzw. y-Richtung als Stab aufgefaßten Platte festgelegt wird, ist unrichtig.

Die exakte Lösung der Gleichungen (10) kann unter Umständen erhebliche Schwierigkeiten bereiten. Es kann dann zur Aufstellung von Näherungslösungen von Interesse sein, das zu den

Gleichungen (10) gehörige, aus dem Energiekriterium der Stabilität des Systems folgende Variationsproblem zu kennen. Dieses lautet

$$\delta \int_0^a \int_0^b \Big\{ \omega_x u'^2 + \omega_y v^{\bullet 2} + \frac{1-\mu}{2} \varrho (u^{\bullet 2} + v'^2) + 2\mu \varrho u' v^{\bullet} + (1-\mu) \varrho u^{\bullet} v' - \\ - 2(1-\mu^2) \vartheta b (\varphi_x u' w'' + \varphi_y v^{\bullet} w^{\bullet\bullet}) + \frac{\vartheta^2 b^2}{12} \left[\lambda_x w''^2 + \lambda_y w^{\bullet\bullet 2} + \right. \\ + 2\mu \varrho^3 w'' w^{\bullet\bullet} + 2(1-\mu) \varrho^3 w'^{\bullet 2} \Big] - \frac{1-\mu^2}{E} \left[\sigma (v'^2 + w'^2 - \right. \\ \left. - 2\eta b v' w^{\bullet} + \eta^2 b^2 w'^{\bullet 2}) - 2\tau \varrho (u' u^{\bullet} + v' v^{\bullet} + w' w^{\bullet}) \right] \Big\} \, dx \, dy = 0 . \tag{11}$$

Man bestätigt leicht, daß die Eulerschen Gleichungen von (11) die Differentialgleichungen (10) sind. Auf eine Ableitung von (11) sei hier verzichtet, da diese nichts Neues bietet.

3. Lösung für reine Druckbelastung. a) Allgemeine Beulbedingung. Im folgenden sei für die allseitig gelenkig gelagerte, nur durch Druckkräfte beanspruchte Platte die Beulbedingung ausführlich entwickelt. Die Gleichungen (10) werden bei $\tau = 0$ durch die Partikularlösung

$$u = A \cos m \frac{\pi}{a} x \sin n \frac{\pi}{b} y , \\ v = B \sin m \frac{\pi}{a} x \cos n \frac{\pi}{b} y , \\ w = C \sin m \frac{\pi}{a} x \sin n \frac{\pi}{b} y , \tag{12a bis c}$$

mit $m, n = 1, 2, 3 \ldots$ befriedigt. Hierbei werden an den Plattenrändern die Größen w, N_x, N_y, M_x und M_y zu Null, so daß die Lösung für eine in z-Richtung unverschieblich, im übrigen aber biegemomenten- und längskräftefrei gelagerte Platte gilt. Schubkräfte und Drillungsmomente verschwinden allerdings an den Rändern nicht und müssen dort aufgenommen werden können. Setzt man (12) in (10) ein, so erhält man für die Konstanten A, B, C drei homogene Gleichungen, deren Nennerdeterminante verschwinden muß. Nach Entwicklung dieser Determinante kann man die Beulbedingung zunächst in folgender Form schreiben:

$$\sigma = \frac{E \pi^2 \vartheta^2}{12(1-\mu^2)} k \tag{13a}$$

mit $$k = \frac{1}{m^2 (\alpha^2 + \underline{\pi^2 \eta^2 \alpha^2 n^2})} \Big\{ \lambda_x m^4 + 2\varrho^3 \alpha^2 m^2 n^2 + \lambda_y \alpha^4 n^4 - \\ - \frac{12(1-\mu^2)^2}{\vartheta^2} \Big[(1+\mu) \varrho \varphi_x \vartheta \alpha^2 m^4 n^2 \Big(\eta \underline{\frac{\sigma}{E} m^2} - \varphi_y \vartheta \alpha^2 n^2 \Big) + \varphi_x^2 \vartheta^2 m^6 \Big(\varphi_y \alpha^2 n^2 + \\ + \frac{1-\mu}{2} \varrho m^2 - \underline{(1-\mu^2) \frac{\sigma}{E} m^2} \Big) + \alpha^2 n^2 \Big(\omega_x m^2 + \frac{1-\mu}{2} \varrho \alpha^2 n^2 \Big) \Big(\eta \underline{\frac{\sigma}{E} m^2} - \varphi_y \vartheta \alpha^2 n^2 \Big)^2 \Big] : \\ : \Big[\Big(\omega_x m^2 + \frac{1-\mu}{2} \varrho \alpha^2 n^2 \Big) \Big(\omega_y \alpha^2 n^2 + \frac{1-\mu}{2} \varrho m^2 - \underline{(1-\mu^2) \frac{\sigma}{E} m^2} \Big) - \frac{(1+\mu)^2}{4} \varrho^2 \alpha^2 m^2 n^2 \Big] \Big\} .$$

Beachtet man, daß η und $\frac{\sigma}{E}$ stets klein gegen Eins sind, so kann man in der Gleichung für k die unterstrichenen Glieder vernachlässigen. Man erhält dann k in der bei praktischen Rechnungen stets anwendbaren vereinfachten Form

$$k = \frac{1}{\alpha^2 m^2} \Big[\lambda_x m^4 + 2\varrho^3 \alpha^2 m^2 n^2 + \lambda_y \alpha^4 n^4 - \\ - 12(1-\mu^2)^2 \frac{\varphi_x^2 m^6 \Big(\omega_y \alpha^2 m^2 + \frac{1-\mu}{2} \varrho m^2 \Big) + \varphi_y^2 \alpha^6 n^6 \Big(\omega_x m^2 + \frac{1-\mu}{2} \varrho \alpha^2 n^2 \Big) - (1+\mu) \varrho \varphi_x \varphi_y \alpha^4 m^4 n^4}{\Big(\omega_x m^2 + \frac{1-\mu}{2} \varrho \alpha^2 n^2 \Big) \Big(\omega_y \alpha^2 n^2 + \frac{1-\mu}{2} \varrho m^2 \Big) - \frac{(1+\mu)^2}{4} \varrho^2 \alpha^2 m^2 n^2} \Big] . \tag{13b}$$

Die kleinste Beullast wird durch das ungünstigste Wertepaar m, n bestimmt. Bei Symmetrie der Versteifungen zur Mittelfläche tritt die niedrigste Beullast stets für $n=1$ auf. Bei Unsymmetrie läßt sich diese Aussage nicht allgemein aufrecht erhalten. Wie jedoch Zahlenrechnungen zeigen, dürfte bei den praktisch in Betracht kommenden Querschnittsgrößen kaum ein anderer Wert als $n=1$ maßgeblich werden.

b) Nur in Kraftrichtung versteifte Platte. Für den Sonderfall, daß die Platte nur in x-Richtung versteift ist, lassen sich aus der Beulbedingung einige allgemein gültige Erkenntnisse ableiten, die praktisch von gewissem Interesse sind. Mit $F_y=0$ und $I_y=0$ wird

$$\varphi_y=0,\quad \lambda_y=\varrho^3,\quad \omega_y=\varrho.$$

Man bekommt damit aus (13b)

$$k=\frac{1}{\alpha^2 m^2}\left[\lambda_x m^4+2\varrho^3\alpha^2 m^2 n^2+\varrho^3\alpha^4 n^4-12(1-\mu^2)^2\frac{\varphi_x^2 m^6\left(\alpha^2 n^2+\frac{1-\mu}{2}m^2\right)}{\left(\omega_x m^2+\frac{1-\mu}{2}\varrho\alpha^2 n^2\right)\left(\alpha^2 n^2+\frac{1-\mu}{2}m^2\right)-\frac{(1+\mu)^2}{4}\varrho\alpha^2 n^2}\right]. \tag{14}$$

Für die folgende Untersuchung ist es von Bedeutung, den Wert von k zu bestimmen, der sich ergibt, wenn man die Lagerung der Platte längs der Ränder $y=0$ und $y=b$ unbeachtet läßt, indem man die Ausdehnung der Platte in y-Richtung als unendlich groß annimmt. Diesen Wert von k erhält man, wenn man in der eckigen Klammer von (14) den Grenzübergang $\alpha\to 0$ vollzieht. Man bekommt

$$(k\,\alpha^2)_{\alpha=0}=\left[\lambda_x-12\,(1-\mu^2)^2\frac{\varphi_x^2}{\omega_x}\right]m^2. \tag{15}$$

Setzt man hierin für λ_x, φ_x und ω_x die Ausgangswerte ein, so erhält man mit (13a) für die Beulspannung

$$\sigma_{b=\infty}=\frac{E\pi^2}{a^2(t+F_x)}\,m^2\left[\frac{t^3}{12(1-\mu^2)}+J_x^*-\frac{S_x^{*2}}{\frac{t}{1-\mu^2}+F_x}\right].$$

Das ist — bis auf die im allgemeinen unwesentliche Größe μ^2, deren Einfluß sich höchstens bei ganz schwachen Versteifungen bemerkbar macht — die Eulerspannung eines aus der Platte herausgeschnittenen Streifens von der Breite Eins.

Zu einer übersichtlichen Darstellung der Beulbedingung ist es ferner zweckmäßig, die oben bereits definierten dimensionslosen Größen g und h einzuführen. Dabei ist $g=e/\sqrt{J_x/F_x}$ das Verhältnis des Abstandes e_x zum Trägheitshalbmesser des Querschnitts einer Versteifung, eine Größe, die sich bei allen für die Versteifungen praktisch in Betracht kommenden Querschnittsformen nur innerhalb recht enger Grenzen ändert. Die Bedeutung von h wird anschaulich am besten klar, wenn man den Abstand s_x zwischen zwei Versteifungen mit einführt. Dann ist

$$h=\frac{J_x}{t\,F_x^2}=\frac{s_x}{t}\,\frac{1}{\left(\frac{F_x\,s_x}{J_x/F_x}\right)}.$$

Die eingeklammerte Größe wird häufig als Profilwert bezeichnet und ist das Verhältnis vom Querschnitt einer Versteifung zum Quadrat des Trägheitshalbmessers, ein Wert, der sich ebenfalls nur innerhalb enger Schranken ändert. h ist also dann bis auf einen konstanten Faktor das Verhältnis vom Steifenabstand zur Blechdicke. Die Querschnittsgrößen ω_x, φ_x und λ_x lassen sich, wie folgt, durch ϱ, g und h ausdrücken:

$$\omega_x=1-\mu^2(1-\varrho),$$

$$\varphi_x=(1-\varrho)^2\left(g\sqrt{h\,\frac{\varrho}{1-\varrho}}+\frac{1}{2}\,\frac{\varrho}{1-\varrho}\right),$$

$$\lambda_x=\varrho^3+12\,(1-\mu^2)\,(1-\varrho)^3\left[\frac{\varrho}{1-\varrho}\,h+\left(g\sqrt{h\,\frac{\varrho}{1-\varrho}}+\frac{1}{2}\,\frac{\varrho}{1-\varrho}\right)\right].$$

In Abb. 5 ist nun die Größe $k a^2$ in Abhängigkeit von ϱ mit a und h als Parameter dargestellt. Bei gegebenen Plattenabmessungen a und b und unveränderlichem Werkstoffaufwand $t + F_x$ ist $k a^2$ der Beullast der Platte proportional. Die Veränderliche ϱ gibt die Aufteilung des Materials auf Blech und Versteifungen an. Die untere Kurvenschar in Abb. 5 gilt für $h = 20$, die mittlere für $h = 100$ und die obere für $h = 500$, womit der praktisch wichtige Bereich der Größe h erfaßt sein dürfte. Bei allen drei Kurvenscharen ist $\mu = 0{,}3$ und $g = 1{,}2$. Der letztere Wert stellt für den Parameter g einen Mittelwert des praktisch in Frage kommenden Bereiches dar, der sich bei Versteifungen, die nur auf einer Blechseite angeordnet sind, höchstens von $g = 0{,}5$ bis $g = 2{,}0$ erstrecken dürfte. Abb. 5 vermittelt nun folgende Erkenntnisse.

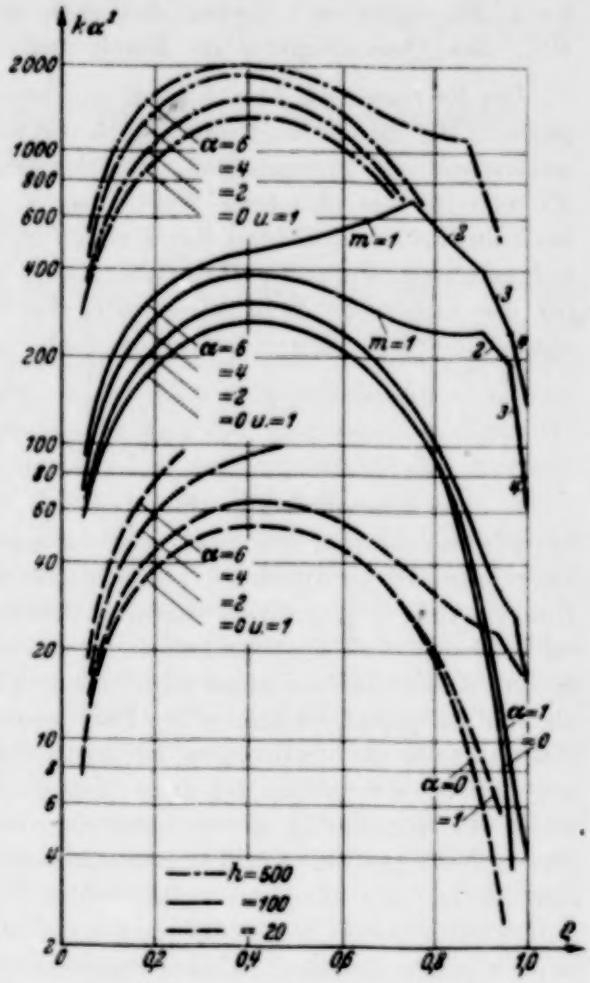


Abb. 5. $k a^2$ in Abhängigkeit von ϱ für $g = 1{,}2$ und $\mu = 0{,}3$.

1. Es ist in einem recht großen Bereich erlaubt, die Platte als Stab nach (15) zu berechnen. Die Kurven $a = 1$ beginnen erst zwischen $\varrho = 0{,}8$ und 0,9 sich merklich von den Kurven $a = 0$ zu unterscheiden, so daß etwa für $a \leqq 1$ und $\varrho \leqq 0{,}8$ die vereinfachte Berechnung der Platte als Stab zulässig erscheint.

2. Bei festem ϱ, also bei festgelegter Materialverteilung, wird die Beullast der Platte um so größer, je größer h, also $\frac{s_x}{t}$ ist. Das heißt: Es ist günstiger, wenige Versteifungen mit großem Querschnitt und Trägheitsmoment in großem Abstand, als viele kleine Versteifungen zu wählen. Eine Grenze ist hier natürlich dadurch gegeben, daß bei zu großem Steifenabstand das Blech zwischen den Versteifungen ausbeult[1]. Soll dieses vermieden werden, so muß

$$\sigma = \frac{E \pi^2}{12 (1 - \mu^2)} \vartheta^2 k \leqq \frac{E \pi^2}{12 (1 - \mu^2)} \left(\frac{t}{s_x}\right)^2 k_{BI}$$

sein, wobei der rechts vom Ungleichheitszeichen stehende Ausdruck die Beulspannung des Blechstreifens zwischen den Versteifungen bedeuten möge. Diesen Streifen kann man als unendlich lang und zu beiden Seiten eingespannt ansehen und dementsprechend $k_{BI} \approx 7{,}0$ setzen[2]. Man bekommt dann die Bedingung

$$\frac{(t + F_x)^2}{b} k \leqq \left(\frac{t}{s_x}\right)^2 7{,}0$$

oder

$$s_x^2 \leqq \frac{7{,}0\, \varrho^2}{k} b^2 .$$

3. Fast alle Kurven haben ein ziemlich ausgeprägtes Maximum, das etwas oberhalb von $\varrho = 0{,}4$ liegt. Erst bei den praktisch unwesentlichen, sehr großen a-Werten wandert das Maximum, das jetzt aus einer durch die Kurven $m = 1$ und $m = 2$ gebildeten Spitze besteht, allmählich nach

---

[1] Die in dieser Arbeit abgeleiteten Formeln können näherungsweise auch für Plattenfelder verwendet werden, bei denen man ein Ausbeulen des Bleches zwischen den Versteifungen zuläßt. Den zwischen den Versteifungen infolge des Beulens ausfallenden Blechstreifen faßt man dabei am zweckmäßigsten als eine „negative" Versteifung auf und rechnet statt mit F_x und I_x mit reduzierten Werten F_x' und I_x'. Ist s_x' die „mittragende Breite" des mit einer Versteifung mitwirkenden Blechstreifens, so ist zu setzen

$$F_x' = F_x - t\left(1 - \frac{s_x'}{s_x}\right), \quad J_x' = J_x - \frac{t^3}{12 (1 - \mu^2)} \left(1 - \frac{s_x'}{s_x}\right).$$

Entsprechende Ausdrücke gelten für Querschnitt und Trägheitsmoment der Versteifungen in y-Richtung.

[2] Vgl. S. *Timoshenko*, a. a. O. S. 345.

$\varrho = 1$. Es ergibt sich daraus, daß man die günstigste Materialausnutzung erhält, wenn man etwa 40 % des Querschnittes im Blech und 60 % in den Versteifungen unterbringt.

Die Kurven von Abb. 5 sind, wie bereits erwähnt, für einen Mittelwert des Parameters g aufgestellt, der bei Versteifungen gilt, die auf einer Blechseite angeordnet sind. Es ist nun natürlich wesentlich zu untersuchen, wie der Kurvenverlauf von g abhängt. Ermittelt man dazu die Kurven für verschiedene Werte von g, so ergibt sich, daß dabei k zwar quantitativ durchaus beeinflußt wird, daß aber der Kurvenverlauf grundsätzlich ungeändert bleibt und somit die eben aufgestellten Formeln ihre Gültigkeit behalten. Es zeigt sich sogar, daß dieses nicht nur für die äußersten Schranken gilt, die für g in Frage kommen, wenn die Versteifungen auf einer Blechseite liegen, sondern auch bei symmetrisch angeordneten Versteifungen, bei denen $e_s = -\frac{t}{2}$ und damit $g = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{h\,\frac{1-\varrho}{\varrho}}}$ ist.

4. Zusammenfassung. Es wird das Ausbeulen einer anisotropen Rechteckplatte untersucht, bei der die Anisotropie praktisch dadurch zustande kommt, daß eine homogene isotrope Platte konstanter Dicke durch zwei sich senkrecht kreuzende Scharen von Versteifungen verstärkt wird. Dabei wird — gegenüber bereits vorliegenden Untersuchungen — die Möglichkeit exakt berücksichtigt, daß die Versteifungen nur auf einer Seite der isotropen Platte, also unsymmetrisch zu deren Mittelfläche angeordnet sind. Für die Belastung durch Druck- und Schubkräfte werden die Differentialgleichungen des Problems in der üblichen Art und Weise aus den Gleichgewichtsbedingungen am verformten Element abgeleitet und dazu das entsprechende Variationsproblem angegeben. Wesentlich ist dabei lediglich, daß hier infolge der Unsymmetrie der Versteifungen nicht von vornherein die Dehnungen und Schubverformungen für irgendeine „neutrale Ebene" gleich Null gesetzt werden können, sondern mit berücksichtigt werden müssen. Für die reine Druckbelastung wird dann die Beulbedingung einer allseitig gelenkig gelagerten Platte explizit aufgestellt. Diese Beulbedingung wird schließlich für die nur in Kraftrichtung versteifte Platte noch näher untersucht. Dabei ergeben sich unter anderem Anhaltspunkte für eine zweckmäßige Wahl des Steifenabstandes und die Aufteilung des Materials auf Blech und Versteifungen.

(Eingegangen am 7. November 1946.)

Über die Bewegung des stabilen schweren symmetrischen Kreisels bei kleinen Neigungswinkeln seiner Achse.

Von **K. Stange** in Bad Sachsa.

1. Einführung. Im folgenden wollen wir die Bewegung der Achse eines stabilen symmetrischen Kreisels unter dem Einfluß seines Eigengewichts G untersuchen und dabei besonders auf den Fall „kleiner Neigungswinkel" α der Kreiselachse achten. Wir beziehen die Bewegung nach Abb. 1 auf ein rechtwinkliges räumliches Achsenkreuz (X, Y, Z), dessen Z-Achse senkrecht nach oben zeigt. Der Kreiselachse ordnen wir den Einheitsvektor $\mathfrak{a}$ und der Z-Achse den Einheitsvektor $\mathfrak{e}$ zu. Der Winkel α zwischen den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{e}$ ist der Neigungswinkel des Kreisels. Die durch $\mathfrak{a}$ gelegte senkrechte Ebene bildet mit der (X, Z)-Ebene den Winkel ψ. Durch α und ψ (zwei der üblichen drei Eulerschen Winkel) ist die jeweilige Lage der Kreiselachse im Raume vollständig bestimmt. Da wir nur die Bewegung der Kreiselachse verfolgen wollen und uns die „Eigendrehung" um die Symmetrieachse $\mathfrak{a}$ nicht beschäftigt, so genügt es, aus den Bewegungsgleichungen die Lagewinkel α und ψ als Funktionen der Zeit t zu ermitteln.

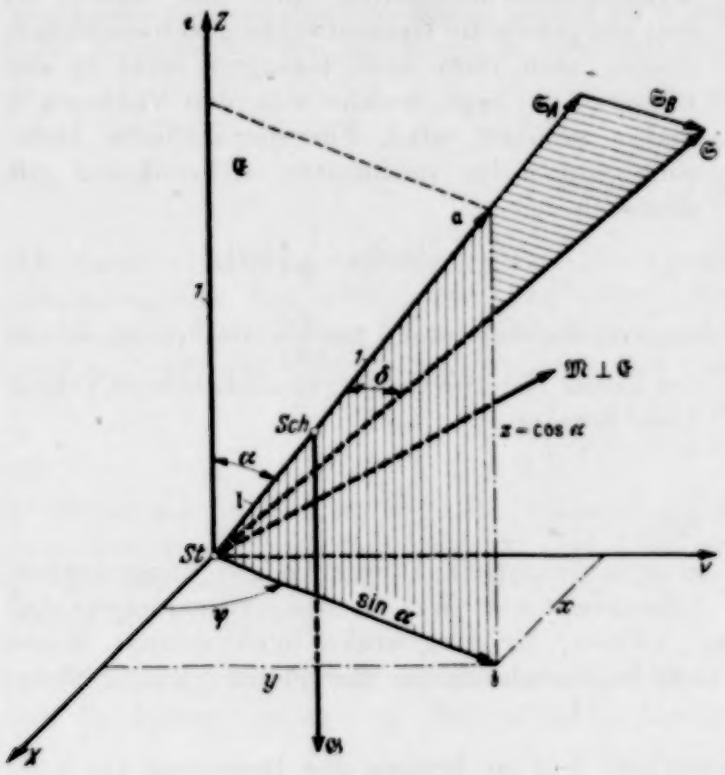


Abb. 1.

Die strenge Lösung, auf die wir hier nicht weiter eingehen, ist bekannt[1]. Engt man sie auf den Sonderfall ein, daß der Neigungswinkel α „klein" bleibt, so läßt sie sich erheblich vereinfachen. Sie liefert dann u. a. für die Kreisfrequenzen ω_N und $\dot{\omega}_P$ der Nutations- und Präzessionsbewegung (bei Einführung geeigneter dimensionsloser Größen) die Ausdrücke

$$\omega_N = \sqrt{\frac{\sigma - 1}{\sigma}} \tag{I}$$

und

$$\omega_P = \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{\frac{\sigma - 1}{\sigma}}\right]. \tag{II}$$

In diesen Gleichungen ist σ die Stabilitätszahl des schweren Kreisels [vgl. Abschn. 6, Gl.(28_2)].

Wird die jeweilige Lage der Kreiselachse (im Gegensatz zu vorhin nicht durch die Eulerschen Winkel α und ψ, sondern) durch die Richtungswerte (x, y, z) des ihr zugeordneten Einheitsvektors $\mathfrak{a}$ festgelegt, so liefern die unter der Voraussetzung „kleiner" Winkel α aufgestellten Bewegungsgleichungen für x und y gleichfalls zwei Frequenzen, eine „schnelle" ω_1 und eine „langsame" ω_2. Es gilt nun, wie wir später beweisen werden,

$$\omega_N \neq \omega_1, \quad \text{solange } \sigma > 1 \text{ „klein" ist;} \tag{III}$$

$$\omega_N \approx \omega_1 \quad \text{für „große" Werte von } \sigma; \tag{IV}$$

dagegen stets

$$\omega_P = \omega_2. \tag{V}$$

Während also die „langsamen" Frequenzen ω_2 und ω_P für alle Stabilitätszahlen übereinstimmen (gleichgültig, ob man die Lage der Achse $\mathfrak{a}$ durch die Eulerschen Winkel α und ψ oder durch die Richtungswerte x, y, z kennzeichnet), weichen die „schnellen" Frequenzen ω_1 und ω_N um so mehr voneinander ab, je mehr sich σ von rechts her dem Werte 1 nähert.

Es taucht damit die Frage auf, ob diese Abweichung durch unterschiedliche Güte der verschiedenen Wege, welche zur Berechnung der Frequenzen dienten, verursacht wird — insbesondere ist dann zu entscheiden, welche der Näherungen für $1 - \sigma$ besser ist — oder ob der Unterschied andere Ursachen hat.

[1] *R. Grammel*, Der Kreisel, S. 95 u. f. Braunschweig 1920.

2. Die Bewegungsgleichungen. Ist l der Abstand des Schwerpunktes *Sch* vom Stützpunkt *St*, so wirkt auf den Kreisel ein Drehmoment $\mathfrak{M}$, das nach Betrag und Richtung durch den Vektor

$$\mathfrak{M} = Gl[\mathfrak{e}\,\mathfrak{a}] \tag{1}$$

dargestellt wird. Da die zeitliche Änderung des Schwunges $\mathfrak{S}$ gleich dem wirkenden Drehmoment ist, so haben wir als erste Bewegungsgleichung

$$\frac{d\mathfrak{S}}{dt} = \mathfrak{M} = Gl\,[\mathfrak{e}\,\mathfrak{a}]\,. \tag{2}$$

Zur Herleitung einer zweiten Beziehung zwischen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{a}$ zerlegen wir den Schwung $\mathfrak{S}$ des Kreisels gemäß Abb. 2 in die Anteile $\mathfrak{S}_A$ in Richtung der Kreiselachse $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{S}_B$ senkrecht dazu.

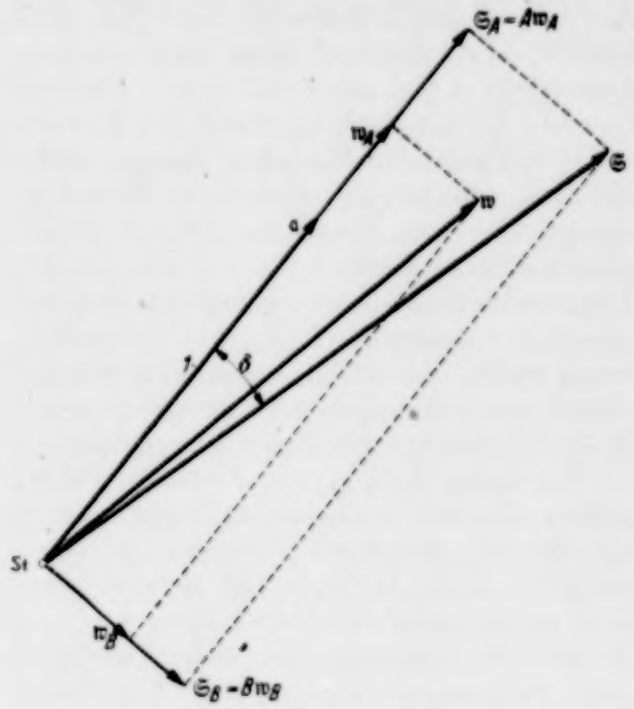


Abb. 2.

Bezeichnen wir mit A und B die Drehmassen des Kreisels bezüglich zweier Hauptachsen durch den Stützpunkt, so gilt

$$\mathfrak{S}_A = A\mathfrak{w}_A \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}_B = B\mathfrak{w}_B\,, \tag{3}$$

wobei $\mathfrak{w}_A$ und $\mathfrak{w}_B$ die den Achsen zugeordneten Winkelgeschwindigkeiten sind. Die Anteile $\mathfrak{w}_A$ und $\mathfrak{w}_B$ geben die Gesamtwinkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$, die nach dem eben Gesagten stets in der Ebene $(\mathfrak{S};\mathfrak{a})$ liegt, welche von den Vektoren $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{a}$ gebildet wird. Für die zeitliche Änderung von $\mathfrak{a}$ im raumfesten Achsenkreuz gilt demnach

$$\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = [\mathfrak{w}\mathfrak{a}] = \frac{1}{B}\,[\mathfrak{S}\,\mathfrak{a}]\,; \tag{4}$$

denn beide Ausdrücke für $\frac{d\mathfrak{a}}{dt}$ stellen einen auf der Ebene $(\mathfrak{S};\mathfrak{a})$ bzw. $(\mathfrak{w};\mathfrak{a})$ senkrechten Vektor vom Betrage

$$\left|\frac{d\mathfrak{a}}{dt}\right| = w_B \tag{5}$$

dar.

Die zwei Bewegungsgleichungen (2) und (4) sind zwei vektorielle Differentialgleichungen erster Ordnung für den Schwungvektor $\mathfrak{S}$ und den Achsenvektor $\mathfrak{a}$. Wir werden später sehen, daß es unter der eingangs genannten Voraussetzung „kleiner" Neigungswinkel leicht gelingt, $\mathfrak{S}$ aus den Gleichungen zu entfernen, und daß eine einfache Gleichung zur Berechnung von $\mathfrak{a}$ übrigbleibt.

3. Anfangsbedingungen. Wir wollen voraussetzen, daß zu Beginn der Bewegung für $t = 0$ der Schwung $\mathfrak{S}$ in die Achse $\mathfrak{a}$ fällt. Es soll also mit $\mathfrak{S}(0) = \mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{a}(0) = \mathfrak{a}_0$

$$\mathfrak{S}_0 = S_0\,\mathfrak{a}_0 \tag{6_1}$$

gelten. Daraus folgt, daß anfangs

$$\mathfrak{w}(0) = \mathfrak{w}_0 = w_0\,\mathfrak{a}_0 \tag{6_2}$$

ist. Die Bewegungsgleichungen (2) und (4) und die Anfangsbedingungen $(6_{1,\,2})$ enthalten als wesentliche Parameter des Bewegungsablaufs

das „Einheitsdrehmoment" $M = Gl$,
die Querdrehmasse B (bezogen auf eine Hauptquerachse durch den Stützpunkt *St*),
den Anfangsschwung $S_0 = Aw_0$ und
den anfänglichen Neigungswinkel α_0 mit $\cos\alpha_0 = \mathfrak{e}\,\mathfrak{a}_0$.

4. Einführung dimensionsloser Größen. Führen wir den auf den Anfangswert S_0 „bezogenen Schwungvektor"

$$\mathfrak{s} = \frac{\mathfrak{S}}{S_0}\,, \tag{7}$$

die „dimensionslose Zeit"

$$\tau = \frac{S_0}{B}\,t \tag{8}$$

und den dimensionslosen Parameter

$$\lambda^2 = \frac{BGl}{S_0^2} \tag{9}$$

ein, so werden die Bewegungsgleichungen (2) und (4) einfacher

$$\frac{d\mathfrak{s}}{d\tau} = \mathfrak{s}^{\cdot} = \lambda^2 [\mathfrak{e}\,\mathfrak{a}] \tag{10}$$

und

$$\frac{d\mathfrak{a}}{d\tau} = \mathfrak{a}^{\cdot} = [\mathfrak{s}\,\mathfrak{a}] \quad \text{mit} \quad |\mathfrak{a}| = 1 . \tag{11}$$

Die Anfangsbedingungen (6_1) gehen über in

$$\mathfrak{a}(0) = \mathfrak{a}_0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{s}(0) = \frac{\mathfrak{S}_0}{S_0} = \mathfrak{a}_0 . \tag{12}$$

Die Bewegungsgleichungen (10) und (11) und die Anfangsbedingungen (12) enthalten im Gegensatz zu vorhin nur noch zwei wesentliche Parameter, λ^2 und α_0. Daraus folgt, daß alle Kreisel mit übereinstimmendem Wertepaar (λ^2, α_0) den gleichen Bewegungsablauf über τ zeigen.

Den Parameter λ^2 wollen wir noch einer kurzen Betrachtung unterziehen. Wir bezeichnen mit a eine kennzeichnende Länge in Richtung der Kreiselachse $\mathfrak{a}$ (z. B. die Gesamtlänge) und mit b eine kennzeichnende Länge in der zu $\mathfrak{a}$ senkrechten Ebene (z. B. einen „Durchmesser"). Dann können wir für die Masse m und für die Drehmassen A und B des Kreisels ansetzen

$$\left.\begin{aligned} m &= \varrho_M\, a\, b^2 , \\ A &= \varrho_A\, a\, b^4 , \\ B &= \varrho_B\, a^3\, b^2 . \end{aligned}\right| \tag{13}$$

Die Massenverteilung wird durch die drei Parameter ϱ_M, ϱ_A und ϱ_B von der Dimension einer Dichte gekennzeichnet. Bei einer „Streckung" oder „Stauchung" des Kreisels in der Richtung $\mathfrak{a}$ oder in der dazu senkrechten Ebene bleiben ϱ_M, ϱ_A und ϱ_B fest. Der kennzeichnende Parameter λ^2 wird nach (9) und (13) das Produkt von vier Faktoren

$$\lambda^2 = \left(\frac{\varrho_M \varrho_B}{\varrho_A^2}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^3\left(\frac{l}{a}\right)\left(\frac{g}{b w_0^2}\right). \tag{14}$$

Dabei ist a/b ein Maß für die „Schlankheit" des Kreisels; l/a ist der „dimensionslose Hebelarm" vom Stützpunkt zum Schwerpunkt und g/bw_0^2 stellt das Verhältnis von Erdbeschleunigung zu Fliehbeschleunigung im Abstand b dar und ist damit ein Maß für die Beanspruchung des Kreisels durch die Fliehkräfte.

5. Lösung der Bewegungsgleichungen. Die Projektion des bezogenen Schwungvektors $\mathfrak{s}$ auf die Achse $\mathfrak{a}$ ist $s_A = \mathfrak{s}\,\mathfrak{a}$. Ihre zeitliche Ableitung wird

$$(\mathfrak{s}\,\mathfrak{a})^{\cdot} = \mathfrak{s}^{\cdot}\,\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^{\cdot}\,\mathfrak{s}$$

oder wegen (10) und (11)

$$(\mathfrak{s}\,\mathfrak{a})^{\cdot} = \lambda^2 \mathfrak{a}\,[\mathfrak{e}\,\mathfrak{a}] + \mathfrak{s}\,[\mathfrak{s}\,\mathfrak{a}] = 0 ,$$

d. h. in Verbindung mit (12)

$$s_A = (\mathfrak{s}\,\mathfrak{a}) = \text{const} = (\mathfrak{s}\,\mathfrak{a})_0 = 1 . \tag{15}$$

Der bezogene Schwunganteil s_A in Richtung der Kreiselachse $\mathfrak{a}$ ist zeitlich unveränderlich gleich 1.

Die Projektion von $\mathfrak{s}$ auf die senkrechte Z-Achse wird $s_E = \mathfrak{s}\,\mathfrak{e}$. Da $\mathfrak{e}$ raumfest ist, so wird die zeitliche Ableitung

$$(\mathfrak{s}\,\mathfrak{e})^{\cdot} = \mathfrak{s}^{\cdot}\,\mathfrak{e} \quad \text{oder mit (10)} \quad (\mathfrak{s}\,\mathfrak{e})^{\cdot} = \lambda^2 \mathfrak{e}\,[\mathfrak{e}\,\mathfrak{a}] = 0 .$$

Daraus folgt mit (12)

$$s_E = (\mathfrak{s}\,\mathfrak{e}) = \text{const} = (\mathfrak{s}\,\mathfrak{e})_0 = \mathfrak{a}_0\,\mathfrak{e} = \cos \alpha_0 . \tag{16}$$

Der bezogene Schwunganteil s_E in Richtung der raumfesten Achse $\mathfrak{e}$ ist unveränderlich gleich $\cos \alpha_0$.

Gemäß Abb. 3 gilt also für den bezogenen Schwung s_K in der von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{e}$ gebildeten Ebene nach einem Satze der elementaren Geometrie[1]

$$(s_K \sin \alpha)^2 = 1 + \cos^2 \alpha_0 - 2 \cos \alpha_0 \cos \alpha . \tag{17}$$

[1] s_K ist Durchmesser des Kreises, der durch den Stützpunkt St und durch die Endpunkte der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\cos \alpha_0\,\mathfrak{e}$ geht.

Der Betrag s des bezogenen Schwunges $\mathfrak{s}$ ist vollständig bekannt, wenn man noch den zur Ebene $(\mathfrak{a};\mathfrak{e})$ senkrechten Anteil s_M kennt. Dieser ist $s_M = \mathfrak{s}\mathfrak{m}$, wobei $\mathfrak{m}$ ein Einheitsvektor in Richtung des Moments $\mathfrak{M}$ ist. Es wird wegen $\mathfrak{m} = [\mathfrak{e}\,\mathfrak{a}]/\sin\alpha$

$$s_M = \frac{1}{\sin\alpha}\,\mathfrak{s}\,[\mathfrak{e}\,\mathfrak{a}] = \frac{1}{\sin\alpha}\,\mathfrak{e}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{s}]$$

oder mit (11)

$$\left.\begin{aligned} s_M &= -\frac{1}{\sin\alpha}\,\mathfrak{e}\,\dot{\mathfrak{a}} = -\frac{1}{\sin\alpha}\,(\mathfrak{e}\,\mathfrak{a})^{\cdot} \\ &= -\frac{1}{\sin\alpha}\,(\cos\alpha)^{\cdot} = \dot{\alpha}\,. \end{aligned}\right| \qquad (18)$$

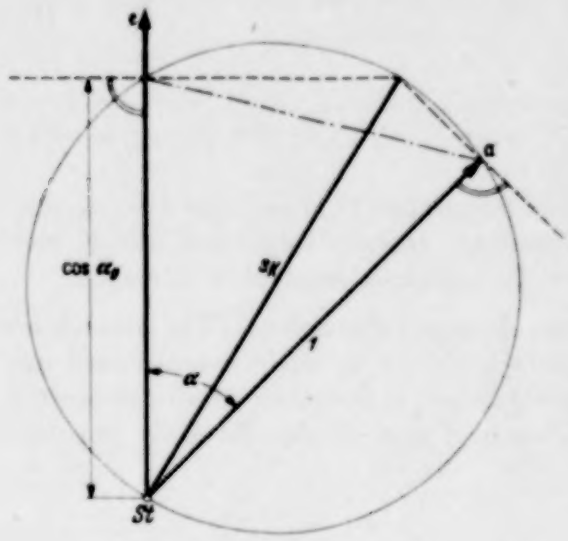


Abb. 3.

Da

$$s^2 = s_K^2 + s_M^2$$

ist, so wird mit (17) und (18)

$$s^2 = 1 + \left(\frac{\cos\alpha_0 - \cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 + \dot{\alpha}^2\,. \qquad (19)$$

Für die zeitliche Ableitung von s^2 gilt wegen (10) und (11)

$$\left(\frac{1}{2}\,s^2\right)^{\cdot} = \mathfrak{s}\,\dot{\mathfrak{s}} = \lambda^2\,\mathfrak{s}\,[\mathfrak{e}\,\mathfrak{a}] = \lambda^2\,\mathfrak{e}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{s}] = -\lambda^2\,\mathfrak{e}\,\dot{\mathfrak{a}} = -\lambda^2(\mathfrak{e}\,\mathfrak{a})^{\cdot}$$

oder

$$\frac{1}{2}\,s^2 = \text{konst} - \lambda^2(\mathfrak{e}\,\mathfrak{a}) = \text{konst} - \lambda^2\cos\alpha\,.$$

Berücksichtigt man die Anfangsbedingung $s^2(0) = 1$, so kommt

$$s^2 = 1 + 2\lambda^2(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)\,. \qquad (20)$$

Die Verknüpfung von (19) und (20) liefert schließlich

$$(\dot{\alpha}\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha_0 - \cos\alpha)\,[(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) - 2\,\lambda^2\sin^2\alpha] = 0\,, \qquad (21)$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung für α, die sich durch Trennung der Veränderlichen integrieren läßt.

Zur Berechnung von ψ gehen wir von (5) und (3) aus:

$$\left|\frac{d\,\mathfrak{a}}{d\,t}\right| = w_B = \frac{S_B}{B}\,.$$

Führen wir hier ebenfalls die dimensionslosen Veränderlichen τ und $\mathfrak{s}$ ein, so kommt

$$|\dot{\mathfrak{a}}| = \left|\frac{d\,\mathfrak{a}}{d\,\tau}\right| = \left|\frac{d\,\mathfrak{a}}{d\,t}\right|\frac{d\,t}{d\,\tau} = \frac{S_B}{B}\,\frac{B}{S_0} = \frac{S_B}{S_0} = s_B\,.$$

Nun ist

$$s_A^2 + s_B^2 = s^2\,,$$

also mit (19) und (15)

$$|\dot{\mathfrak{a}}|^2 = \left(\frac{\cos\alpha_0 - \cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 + \dot{\alpha}^2\,. \qquad (22)$$

Da $\mathfrak{a}$ im raumfesten Achsenkreuz durch die Komponenten $\{\sin\alpha\cos\psi : \sin\alpha\sin\psi : \cos\alpha\}$ gegeben ist, so findet man nach leichter Rechnung

$$|\dot{\mathfrak{a}}|^2 = \dot{\alpha}^2 + (\dot{\psi}\sin\alpha)^2\,. \qquad (23)$$

Die Verknüpfung von (22) und (23) gibt schließlich für die Winkelgeschwindigkeit der Präzessionsbewegung

$$\dot{\psi} = \frac{\cos\alpha_0 - \cos\alpha}{\sin^2\alpha}\,. \qquad (24)$$

Da man aus (21) den „zeitlichen" Verlauf von α berechnen kann, so ist aus (24) auch $\psi(\tau)$ bestimmbar. Wir wollen jedoch die strenge Lösung der Bewegungsgleichungen nicht weiter verfolgen, sondern uns nun dem eingangs genannten Sonderfall zuwenden.

6. Beschränkung der Lösung auf „kleine" Neigungswinkel. Bleibt a klein, so dürfen wir

$$\cos a \approx 1 - \frac{1}{2} a^2 \quad \text{und} \quad \sin a \approx a \tag{25}$$

setzen. Dann nimmt die Grundgleichung (21) zur Berechnung von a die Form

$$(2\,a\,\dot{a})^2 + (a^2 - a_0^2)\left[(a^2 - a_0^2) - 4\,\lambda^2 a^2\right] = 0 \tag{26}$$

an. Führen wir hier als neue Veränderliche β durch die Gleichung

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = 1 + \beta \quad \text{mit} \quad \beta(0) = 0 \tag{27}$$

ein, so kommt für β

$$\sigma\,\dot{\beta}^2 = \beta\left[1 - (\sigma - 1)\beta\right]. \tag{28_1}$$

Dabei ist zur Abkürzung noch

$$\frac{1}{4\,\lambda^2} = \sigma = \frac{S_0^2}{4\,BGI} \tag{28_2}$$

gesetzt worden. Die dimensionslose Größe σ ist die Stabilitätszahl des schweren Kreisels. Aus (28) ist ersichtlich, daß der Bewegungsablauf bei kleinen Neigungswinkeln a auch noch vom Anfangswert a_0 unabhängig wird. Es liegen also ähnliche Verhältnisse wie bei den Pendelschwingungen mit kleinem Ausschlagwinkel vor. Der einzige wesentliche Parameter, der in die Bewegung eingeht, ist $4\,\lambda^2$, bzw. der Kehrwert davon, die Stabilitätszahl σ.

Bisher haben wir keine einschränkende Voraussetzung über σ getroffen. Im folgenden beschränken wir uns auf den Fall des stabilen Kreisels mit

$$\sigma > 1\,. \tag{29}$$

Das ist notwendig, weil sonst die Voraussetzung kleiner Winkel a wohl am Anfang der Bewegung erfüllt wird, wenn a_0 klein ist, aber später nicht mehr zutrifft. Das zeigt bereits der Sonderfall $\sigma = 1$. Dann ist nämlich nach (28_1)

$$\dot{\beta}^2 = \beta$$

oder

$$\beta = \frac{1}{4}\,\tau^2\,,$$

d. h. β und damit nach (27) auch a^2 wächst mit τ^2, so daß die Voraussetzung kleiner Winkel a schließlich sicher verletzt wird.

Für $\sigma > 1$ wird die Lösung von (28_1) nach elementarer Rechnung bei Berücksichtigung der Anfangsbedingung $\beta(0) = 0$

$$\beta = \frac{1}{2(\sigma - 1)}\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{\sigma - 1}{\sigma}}\,\tau\right)\right] \tag{30_1}$$

oder auch

$$\beta = \frac{1}{\sigma - 1}\sin^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma - 1}{\sigma}}\,\tau\right). \tag{30_2}$$

Der Wert β macht also eine einfache cos-Schwingung. Es ist stets

$$\beta_0 = 0 \leqq \beta \leqq \frac{1}{\sigma - 1} = \beta_1$$

und damit nach (27)

$$a_0 \leqq a \leqq a_1\,,$$

wobei das Winkelverhältnis a_1/a_0 durch

$$\frac{a_1}{a_0} = \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma - 1}} \tag{31_1}$$

gegeben ist. Der Neigungswinkel a schwankt demnach periodisch zwischen dem (kleinsten) Anfangswert a_0 und dem größten Wert a_1 hin und her. Die Schwingdauer dieser Bewegung ist nach (30_1)

$$\tau_N = 2\pi\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma - 1}}\,, \tag{31_2}$$

und die Kreisfrequenz wird

$$\omega_N = \sqrt{\frac{\sigma - 1}{\sigma}}\,. \tag{31_3}$$

Der mittlere Wert des Neigungswinkels ist

$$a_m = \frac{1}{2}(a_0 + a_1);$$

und die auf ihn bezogene Schwankung wird mit (31_1)

$$\frac{\Delta a}{a_m} = \frac{a_1 - a_0}{a_1 + a_0} = \frac{\sqrt{\sigma} - \sqrt{\sigma - 1}}{\sqrt{\sigma} + \sqrt{\sigma - 1}} = \left(\sqrt{\sigma} - \sqrt{\sigma - 1}\right)^2. \qquad (31_4)$$

Den Ausdruck $\frac{\Delta a}{a_m}$ wollen wir in die für a geltende Beziehung (27) einführen. Es wird zunächst mit (30_1) und (31_3)

$$2\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = [1 + \cos(\omega_N \tau)] + [1 - \cos(\omega_N \tau)] + \frac{1}{\sigma - 1}[1 - \cos(\omega_N \tau)]$$

oder mit Rücksicht auf (31_1)

$$2\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = 1 + \cos(\omega_N \tau) + \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 [1 - \cos(\omega_N \tau)].$$

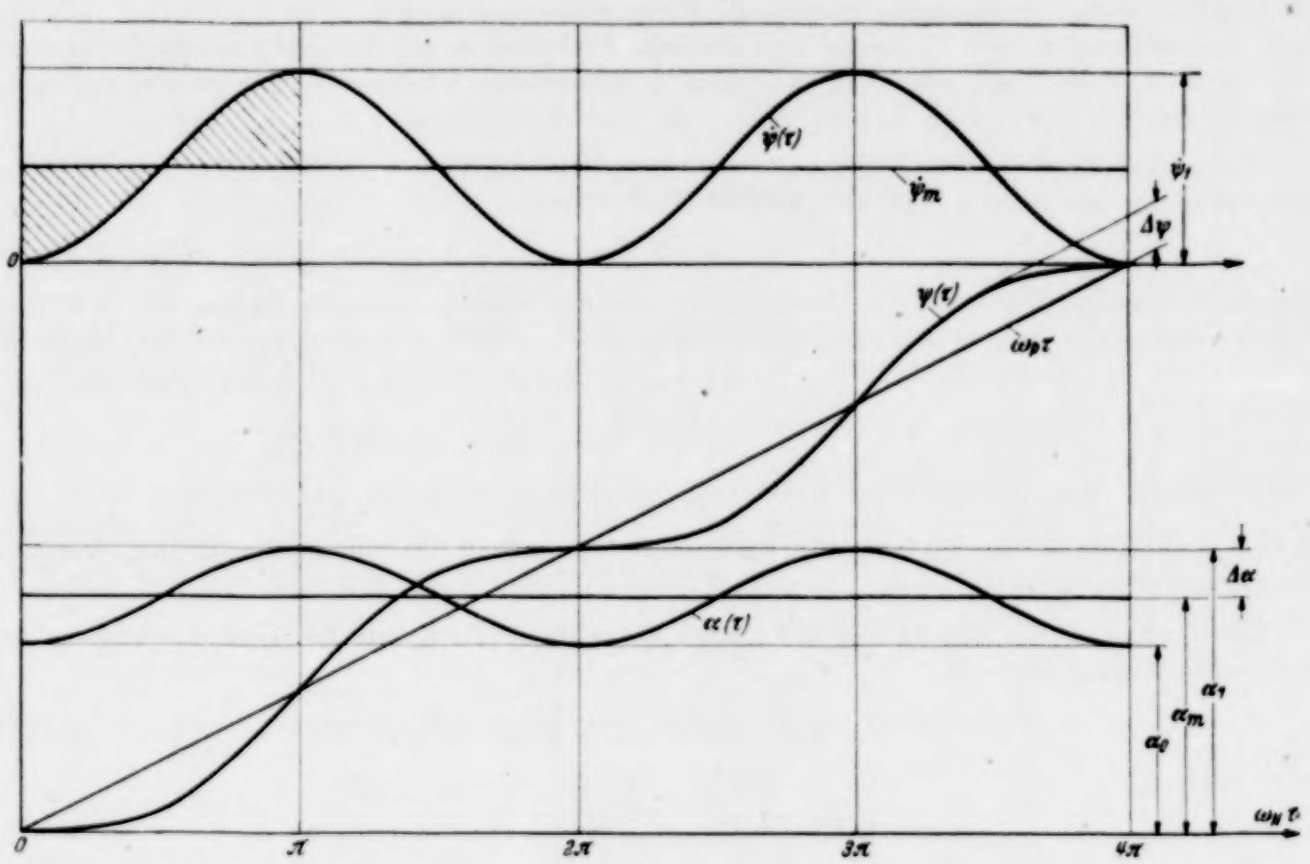


Abb. 4.

Daraus folgt

$$a^2 = \frac{a_1^2 + a_0^2}{2} - \frac{a_1^2 - a_0^2}{2}\cos(\omega_N \tau).$$

Setzt man hier

$$a_0 = a_m - \Delta a \quad \text{und} \quad a_1 = a_m + \Delta a$$

ein, so findet man

$$\left(\frac{a}{a_m}\right)^2 = 1 - 2\frac{\Delta a}{a_m}\cos(\omega_N \tau) + \left(\frac{\Delta a}{a_m}\right)^2. \qquad (32_1)$$

Bereits für Stabilitätszahlen $\sigma \gtrsim 2$ ist $\Delta a / a_m \lesssim \frac{1}{6}$, so daß man die letzte Gleichung mit ausreichender Genauigkeit durch

$$a \approx a_m - \Delta a \cos(\omega_N \tau) \qquad (32_2)$$

ersetzen darf. In erster Näherung schwingt also der Neigungswinkel a mit der Frequenz ω_N um den mittleren Wert a_m (Abb. 4).

Wir sind jetzt auch in der Lage, den Gültigkeitsbereich der Näherung abzuschätzen. Verlangen wir, daß der größte während der Bewegung auftretende Winkel $a_1 \leqq \frac{1}{2}$ bleibt, so muß nach (31_1) bei gegebenem $\sigma > 1$

$$a_0 \leqq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \tag{33}$$

bleiben. Die dem Gleichheitszeichen entsprechende Grenzkurve ist aus Abb. 5 ersichtlich. Alle Punkte $(a_0; \sigma)$ in dem geschrafften Gebiet werden durch die Näherung erfaßt.

Für den Lagewinkel ψ folgt aus (24) mit (25)

$$\dot{\psi} = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right] \tag{34_1}$$

oder mit (27)

$$\dot{\psi} = \frac{1}{2}\,\frac{\beta(\tau)}{1+\beta(\tau)}\,. \tag{34_2}$$

Die Größe $\dot{\psi}$ schwankt also beständig zwischen dem (kleinsten) Wert 0 und dem größten Wert (Abb. 4)

$$\dot{\psi}_1 = \frac{1}{2}\,\frac{\beta_1}{1+\beta_1} = \frac{1}{2\sigma}\,. \tag{35}$$

Den Mittelwert $\dot{\psi}_m$ während einer Nutationsschwingung erhält man aus der Gleichung

$$\dot{\psi}_m\,\tau_N = \int_0^{\tau_N} \dot{\psi}\,d\tau = \frac{1}{2}\int_0^{\tau_N} \frac{\beta(\tau)}{1+\beta(\tau)}\,d\tau\,.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\,\frac{\tau}{2} = \varepsilon\,,$$

so wird mit (30_2) nach kurzer Rechnung

$$\dot{\psi}_m = \frac{1}{\pi\sigma}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\varepsilon}{1-\frac{1}{\sigma}\cos^2\varepsilon}\,d\varepsilon\,.$$

Da $\sigma > 1$ ist, so gilt die Reihenentwicklung

$$\left(1-\frac{1}{\sigma}\cos^2\varepsilon\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{\sigma}\cos^2\varepsilon + \frac{1}{\sigma^2}\cos^4\varepsilon + \frac{1}{\sigma^3}\cos^6\varepsilon + \cdots\,.$$

Ersetzt man im Zähler des Integranden außerdem $\sin^2\varepsilon$ durch $1-\cos^2\varepsilon$, so erhält man

$$\dot{\psi}_m = \frac{1}{\pi\sigma}\int_0^{\pi/2}\left(1 - \frac{\sigma-1}{\sigma}\cos^2\varepsilon - \frac{\sigma-1}{\sigma^2}\cos^4\varepsilon - \frac{\sigma-1}{\sigma^3}\cos^6\varepsilon - \cdots\right)d\varepsilon\,.$$

Integriert man gliedweise und beachtet, daß

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\varepsilon\,d\varepsilon = \frac{1\cdot3\cdot5\ldots\quad(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots\quad 2n}\,\frac{\pi}{2}$$

ist, so kommt für $\dot{\psi}_m$ die Reihe

$$\dot{\psi}_m = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\sigma-1}{\sigma}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sigma} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\,\frac{1}{\sigma^2} + \cdots\right)\right].$$

Nun ist

$$1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sigma} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\,\frac{1}{\sigma^2} + \cdots = \left(1-\frac{1}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\,.$$

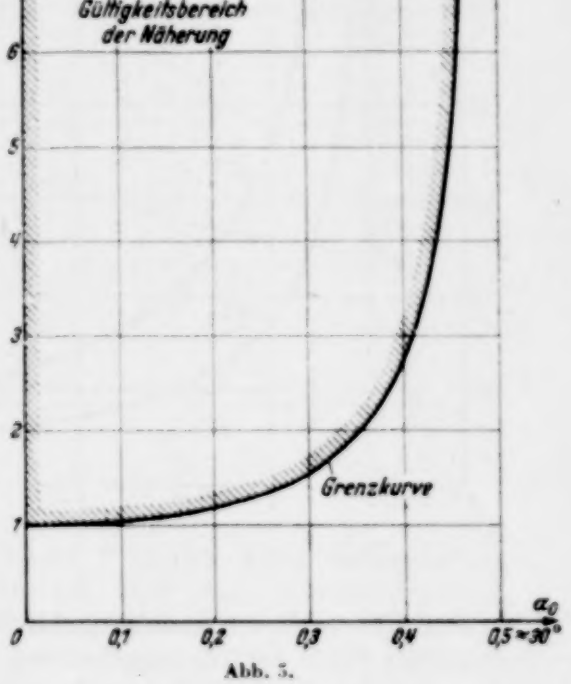


Abb. 5.

so daß wir schließlich für die mittlere Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}_m = \omega_P$ der Präzessionsbewegung den geschlossenen Ausdruck

$$\omega_P = \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right] \tag{36$_1$}$$

finden.

Für große Werte von σ gilt angenähert

$$\omega_P \approx \frac{1}{4\sigma}\left(1 + \frac{1}{4\sigma}\right) \approx \frac{1}{4\sigma}. \tag{36$_2$}$$

Mit (31$_1$), (31$_2$), (31$_3$) und (36$_1$) sind die den Bewegungsablauf kennzeichnenden Größen, der größte Neigungswinkel a_1, die Dauer τ_N bzw. die Kreisfrequenz ω_N der Nutationsbewegung und die mittlere Winkelgeschwindigkeit ω_P der Präzessionsbewegung als Funktionen der Stabilitätszahl σ des schweren Kreisels bekannt (Abb. 6 und 7).

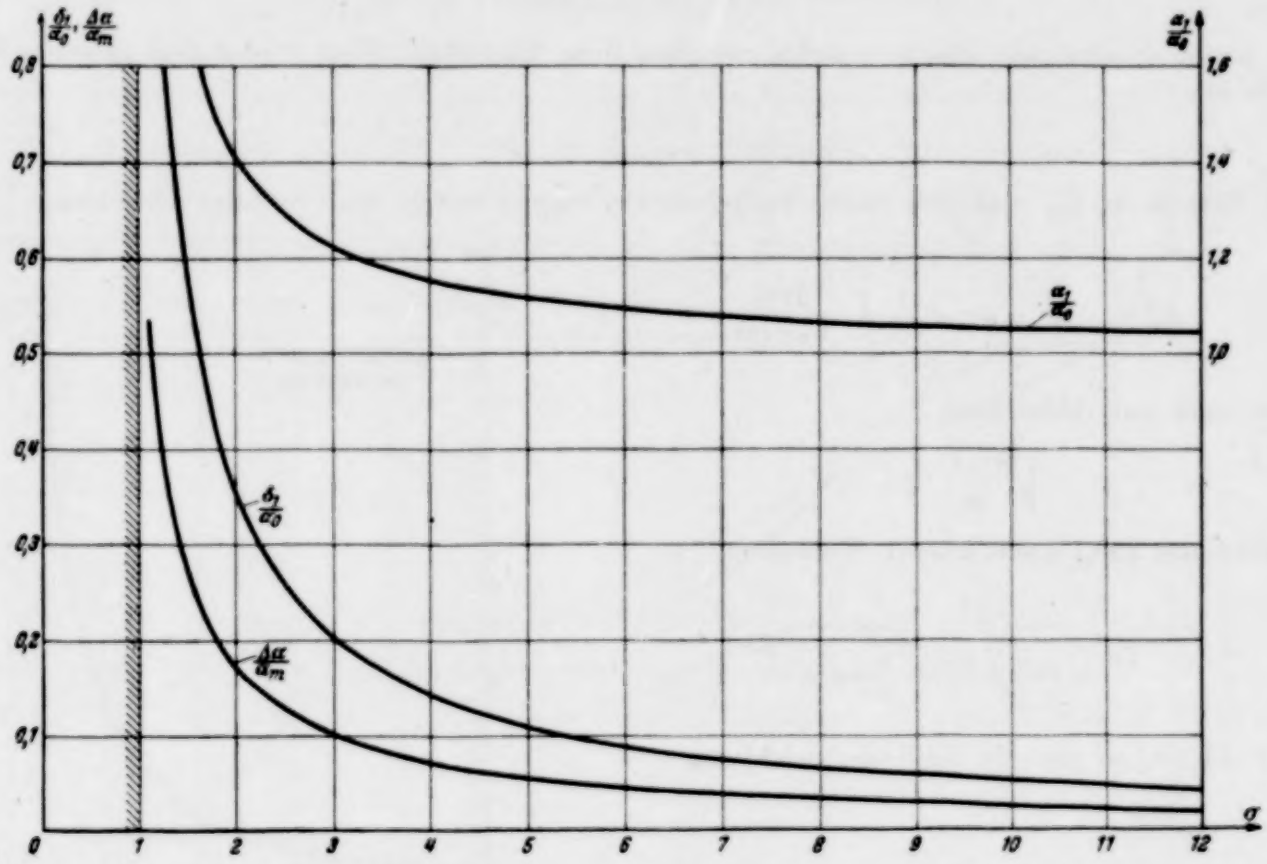


Abb. 6.

7. Der Grenzfall der pseudoregulären Präzession. Dieser soll im folgenden noch kurz gestreift werden. Mit Hilfe der vorausgehenden Ergebnisse läßt sich der Winkel δ zwischen der Schwungachse $\mathfrak{s}$ und der Kreiselachse $\mathfrak{a}$ abschätzen. Aus (11) folgt

$$\sin\delta = \frac{|\dot{\mathfrak{a}}|}{s}.$$

Aus (21) und (22) findet man

$$|\dot{\mathfrak{a}}|^2 = 2\lambda^2(\cos a_0 - \cos a)$$

oder mit (25), (27), (28$_2$) und (30$_2$)

$$|\dot{\mathfrak{a}}| = \frac{a_0}{2}\frac{1}{\sqrt{\sigma(\sigma-1)}}\sin\left(\frac{1}{2}\omega_N\tau\right). \tag{37}$$

Aus (20) kommt

$$s^2 = 1 + |\dot{\mathfrak{a}}|^2 = 1 + \frac{a_0^2}{4}\frac{1}{\sigma(\sigma-1)}\sin^2\left(\frac{1}{2}\omega_N\tau\right)$$

oder mit hinreichender Genauigkeit

$$s \approx 1 + \frac{a_0^2}{8}\frac{1}{\sigma(\sigma-1)}\sin^2\left(\frac{1}{2}\omega_N\tau\right). \tag{38}$$

Es ist also unabhängig von τ stets

$$|\dot{\mathfrak{a}}| \leqq \frac{a_0}{2} \frac{1}{\sqrt{\sigma(\sigma-1)}} \quad \text{und} \quad s \geqq 1 ,$$

also

$$\frac{\delta}{a_0} < \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\sigma(\sigma-1)}} \approx \frac{1}{2\sigma} . \tag{39}$$

Für große Stabilitätszahlen sind demnach die Achsen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{a}$ praktisch nicht voneinander zu unterscheiden (Abb. 6). In diesem besonderen Falle folgt aus (10) die Bewegungsgleichung

$$\dot{\mathfrak{s}} \approx \lambda^2 [\mathfrak{e}\,\mathfrak{s}] = \frac{1}{4\sigma} [\mathfrak{e}\,\mathfrak{s}] ,$$

aus der sich mühelos die Eigenschaften der „pseudoregulären" Präzession ablesen lassen.

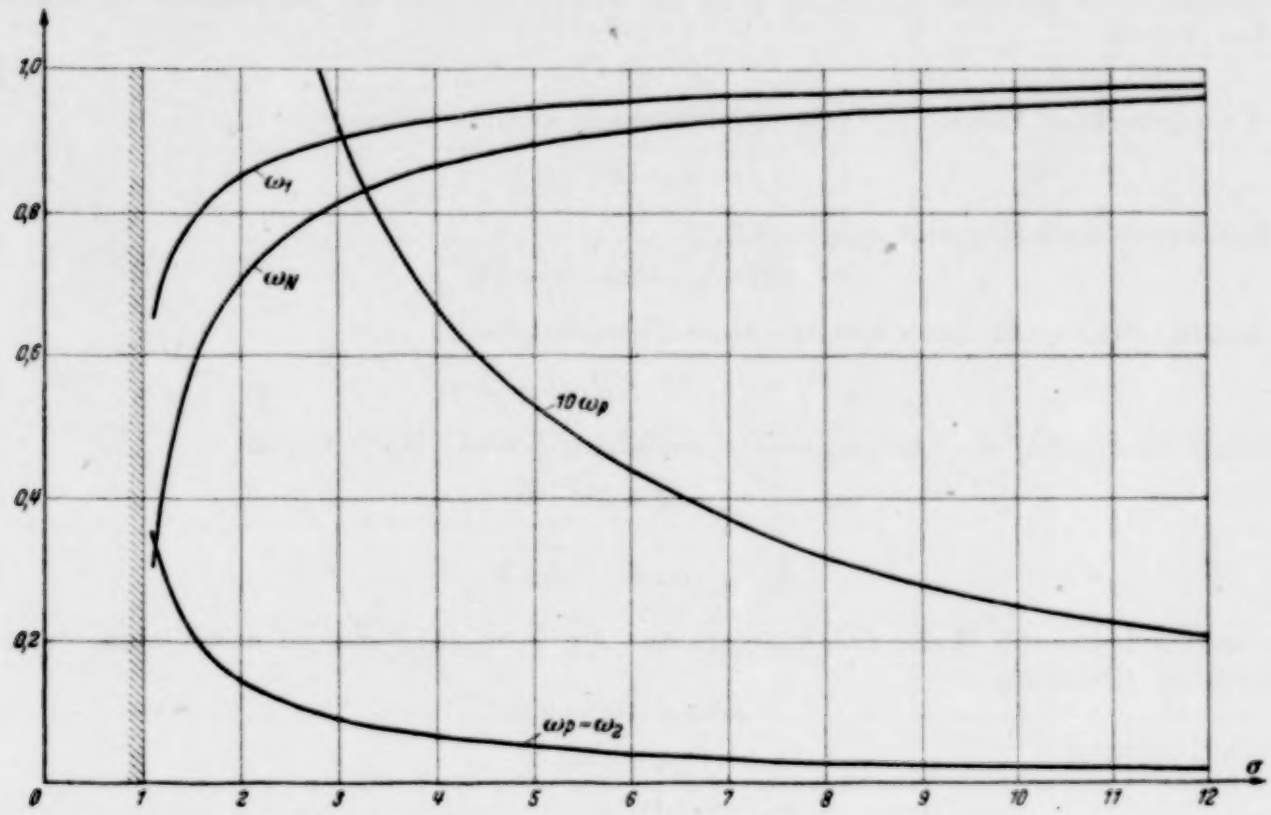


Abb. 7.

8. Die Bewegungsgleichungen für die Richtungswerte x und y in der waagerechten Ebene. Bisher haben wir die Lage der Kreiselachse $\mathfrak{a}$ im raumfesten (X, Y, Z)-Achsenkreuz durch den Neigungswinkel α und den Präzessionswinkel ψ gekennzeichnet. Jetzt wählen wir dazu die Richtungswerte x, y, z des Vektors $\mathfrak{a}$. Seine Projektion auf die waagerechte Ebene sei $\mathfrak{z}$ (Abb. 1). Richten wir unser Augenmerk auf die Bewegung von $\mathfrak{z}$, so ist seine Lage in den vorausgehenden Abschnitten durch Polarkoordination (α, ψ) gegeben, während wir im folgenden dazu rechtwinklige Koordinaten (x, y) benutzen. Da $z^2 = 1 - x^2 - y^2$ ist, genügt es, den zeitlichen Verlauf von x und y zu berechnen.

Multiplizieren wir (11) vektoriell mit $\mathfrak{a}$, so finden wir

$$[\mathfrak{a}\dot{\mathfrak{a}}] = \big[\mathfrak{a}[\dot{\mathfrak{s}}\mathfrak{a}]\big] = (\mathfrak{a}\mathfrak{a})\dot{\mathfrak{s}} - (\mathfrak{a}\dot{\mathfrak{s}})\mathfrak{a}$$

oder wegen (15)

$$\dot{\mathfrak{s}} = \mathfrak{a} + [\mathfrak{a}\dot{\mathfrak{a}}] . \tag{40}$$

Damit ist der bezogene Schwung $\mathfrak{s}$ in Abhängigkeit vom Achsenvektor $\mathfrak{a}$ dargestellt. Setzt man diesen Ausdruck in (10) ein, so erhält man als Vektorgleichung für $\mathfrak{a}$

$$\dot{\mathfrak{a}} + [\mathfrak{a}\dot{\mathfrak{a}}]^{\cdot} = \lambda^2 [\mathfrak{e}\,\mathfrak{a}] \tag{41$_1$}$$

oder

$$\dot{\mathfrak{a}} + [\mathfrak{a}\ddot{\mathfrak{a}}] = \lambda^2 [\mathfrak{e}\,\mathfrak{a}] . \tag{41$_2$}$$

Es ist nun $\mathfrak{e}=\{0;0;1\}$ und wegen der kleinen Neigungswinkel in erster Näherung

$$\mathfrak{a}\approx\{x;\,y;\,1\} \quad \text{und} \quad \ddot{\mathfrak{a}}\approx\{\ddot{x};\,\ddot{y};\,0\}.$$

Damit erhält man aus (41_2) die Komponentengleichungen nach der X- und Y-Richtung

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}-\ddot{y}&=-\lambda^2 y,\\ \dot{y}+\ddot{x}&=+\lambda^2 x.\end{aligned}\right\} \tag{41$_3$}$$

Anfangs ist gemäß (12) mit $a(0)=a_0$ und $\psi(0)=0$

$$x(0)=a_0 \quad \text{und} \quad y(0)=0, \tag{42$_1$}$$

und wegen (11) und (12) gilt $\dot{\mathfrak{a}}_0=[\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{a}_0]=0$ oder

$$\dot{x}(0)=0 \quad \text{und} \quad \dot{y}(0)=0. \tag{42$_2$}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung (41_3) mit $-i$ und addieren sie zur zweiten, so finden wir für den Vektor

$$\mathfrak{z}=x+iy \tag{43$_1$}$$

in der waagerechten Ebene die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{\mathfrak{z}}-i\dot{\mathfrak{z}}-\lambda^2\mathfrak{z}=0. \tag{43$_2$}$$

Die Anfangsbedingungen sind wegen $(42_{1,2})$

$$\mathfrak{z}(0)=a_0 \quad \text{und} \quad \dot{\mathfrak{z}}(0)=0. \tag{43$_3$}$$

Zweckmäßig führen wir auch hier die neue Veränderliche

$$\frac{\mathfrak{z}}{a_0}=\zeta=\xi+i\eta \tag{44$_1$}$$

ein, damit die Lösung vom Anfangswert a_0 unabhängig wird. Dann kommt

$$\ddot{\zeta}-i\dot{\zeta}-\lambda^2\zeta=0 \tag{44$_2$}$$

mit

$$\zeta(0)=1 \quad \text{und} \quad \dot{\zeta}(0)=0. \tag{44$_3$}$$

Geht man in bekannter Weise mit dem Ansatz $\zeta=e^{i\omega\tau}$ in (44_2) ein, so findet man für ω die quadratische Gleichung

$$\omega^2-\omega+\lambda^2=0$$

mit den Lösungen

$$\left.\begin{aligned}\omega_1&=\frac{1}{2}\left[1+\sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right],\\ \omega_2&=\frac{1}{2}\left[1-\sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right].\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Der Lagevektor ζ in der waagerechten Ebene bzw. die ihm zugeordneten Richtungswerte x und y schwingen also mit zwei Frequenzen, einer „schnellen" ω_1 und einer „langsamen" ω_2 (Abb. 8). Ersichtlich ist nach (36_1)

$$\omega_2=\omega_P, \tag{46$_1$}$$

so daß die langsame Frequenz als die der Präzessionsbewegung erkannt ist. Jedoch ist nach (31_3)

$$\omega_1\neq\omega_N. \tag{46$_2$}$$

Entwickelt man ω_N gemäß (31_3) in eine Reihe nach fallenden Potenzen von σ, so kommt

$$\omega_N=1-\frac{1}{2\sigma}+\cdots$$

Entsprechend folgt aus (45)

$$\omega_1=1-\frac{1}{4\sigma}+\cdots$$

Man sieht, daß der Unterschied $\omega_1-\omega_N\approx\frac{1}{4\sigma}$ nur für große Werte von σ belanglos wird. Es gilt also dann

$$\omega_1\approx\omega_N. \tag{46$_3$}$$

Für Werte von σ in der Nähe von 1 ergeben sich jedoch beträchtliche Abweichungen. Die schnelle Frequenz ω_1 der Richtungswerte x und y ist also nicht gleich der Nutationsfrequenz ω_N des Kreisels (Abb. 7).

Das Frequenzverhältnis ω_2/ω_1 ist nach (31_4)

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\Delta\alpha}{\alpha_m}, \tag{47}$$

also gleich der (auf den Mittelwert α_m) bezogenen Schwankung des Neigungswinkels α.

Die allgemeine Lösung von (44_2) hat die Form

$$\zeta = c_1 e^{i\omega_1 \tau} + c_2 e^{i\omega_2 \tau}.$$

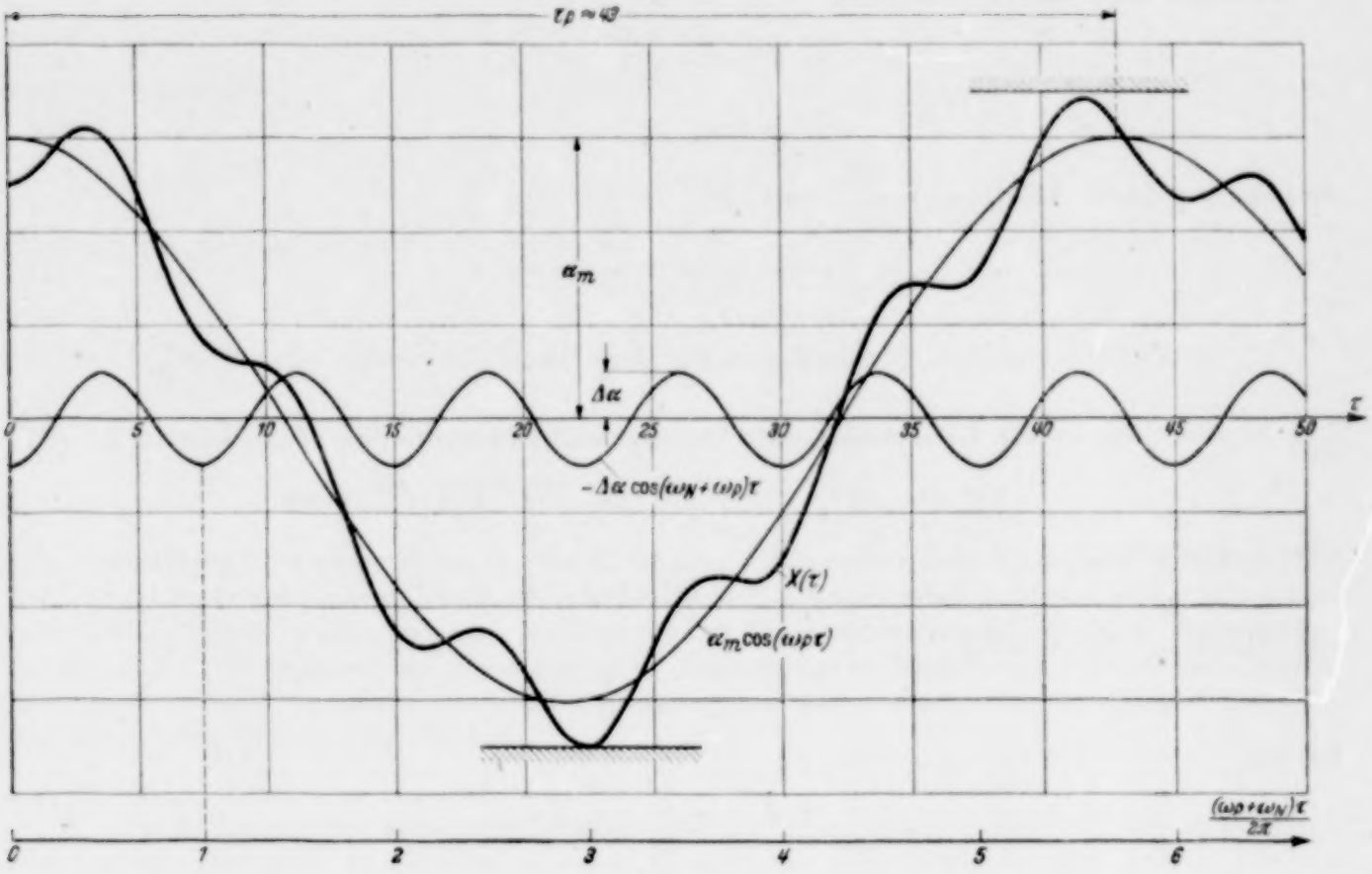


Abb. 8.

Aus den Anfangsbedingungen (44_3)

$$\begin{aligned} \zeta(0) &= c_1 + c_2 &&= 1, \\ \dot{\zeta}(0) &= (c_1\omega_1 + c_2\omega_2)\, i &&= 0 \end{aligned}$$

findet man

$$c_1 = -\frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \quad \text{und} \quad c_2 = +\frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Es wird also

$$\zeta = \frac{1}{\omega_1 - \omega_2}\left(-\omega_2 e^{i\omega_1\tau} + \omega_1 e^{i\omega_2\tau}\right) \tag{48_1}$$

oder, indem man Real- und Imaginärteil trennt,

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\omega_1 - \omega_2}\left[-\omega_2\cos(\omega_1\tau) + \omega_1\cos(\omega_2\tau)\right], \\ \eta &= \frac{1}{\omega_1 - \omega_2}\left[-\omega_2\sin(\omega_1\tau) + \omega_1\sin(\omega_2\tau)\right]. \end{aligned} \tag{48_2}$$

Da die Frequenzen ω_1 und ω_2 durch (45) als Funktionen von σ bekannt sind, so ist die allgemeine Lösung damit vollständig bestimmt.

9. Vergleich der Lösungen $(a;\psi)$ und $(x;y)$. Wir wollen im folgenden entscheiden, ob die Abweichung zwischen den schnellen Frequenzen ω_1 und ω_N etwa durch unterschiedliche Güte der Lösungen $(a;\psi)$ und $(x;y)$ verursacht wird. Das ist nicht der Fall, wenn sich eine Lösung aus der anderen herleiten läßt.

Bei kleinen Neigungswinkeln a gilt mit der Näherung (25)

$$\xi_* = \frac{a}{a_0}\cos\psi \quad \text{und} \quad \eta_* = \frac{a}{a_0}\sin\psi\,. \tag{49}$$

Für a und ψ gelten die Differentialgleichungen (26) bzw. (28_1) und (34). Löst man (49) nach a und ψ auf und setzt das Ergebnis $a(\xi_*, \eta_*)$ und $\psi(\xi_*, \eta_*)$ in die eben genannten Differentialgleichungen ein, so findet man schließlich Beziehungen zur Berechnung von ξ_* und η_*, von denen zu zeigen ist, ob sie mit (41_3) übereinstimmen oder nicht.

Zunächst wird aus (49) mit (27)

$$\left.\begin{aligned} \xi_*^2 + \eta_*^2 &= \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = 1 + \beta\,, \\ \frac{\eta_*}{\xi_*} &= \operatorname{tg}\psi \end{aligned}\right| \tag{50}$$

und daraus durch Ableitung nach τ mit (34_1)

$$\xi_*\dot{\xi}_* + \eta_*\dot{\eta}_* = \frac{a\dot{a}}{a_0^2} = \frac{1}{2}\dot{\beta}\,, \tag{51_1}$$

$$\xi_*\dot{\eta}_* - \eta_*\dot{\xi}_* = \left(\frac{a}{a_0}\right)^2\dot{\psi} = \frac{1}{2}\beta\,. \tag{51_2}$$

Erhebt man diese beiden Gleichungen zum Quadrat und bildet ihre Summe, so kommt mit (28_1)

$$(\xi_*^2 + \eta_*^2)\left(\dot{\xi}_*^2 + \dot{\eta}_*^2\right) = \frac{1}{4}\left(\dot{\beta}^2 + \beta^2\right) = \lambda^2\beta(1+\beta)$$

oder wegen (50)

$$\dot{\xi}_*^2 + \dot{\eta}_*^2 = \lambda^2\beta\,.$$

Die Ableitung davon wird

$$\ddot{\xi}_*\dot{\xi}_* + \ddot{\eta}_*\dot{\eta}_* = \frac{1}{2}\lambda^2\dot{\beta}\,.$$

Es war

$$\xi_*\dot{\xi}_* + \eta_*\dot{\eta}_* = \frac{1}{2}\dot{\beta}\,. \tag{51_1}$$

Löst man diese zwei „linearen" Gleichungen nach den „Unbekannten" $\dot{\xi}_*$ und $\dot{\eta}_*$ auf, so findet man

$$\dot{\xi}_* = \frac{\begin{vmatrix} \lambda^2 & \ddot{\eta}_* \\ 1 & \eta_* \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \ddot{\xi}_* & \ddot{\eta}_* \\ \xi_* & \eta_* \end{vmatrix}}\frac{\dot{\beta}}{2} = \frac{\dot{\beta}}{2}\,\frac{-\lambda^2\eta_* + \ddot{\eta}_*}{\xi_*\ddot{\eta}_* - \eta_*\ddot{\xi}_*}$$

und

$$\dot{\eta}_* = \frac{\begin{vmatrix} \ddot{\xi}_* & \lambda^2 \\ \xi_* & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \ddot{\xi}_* & \ddot{\eta}_* \\ \xi_* & \eta_* \end{vmatrix}}\frac{\dot{\beta}}{2} = \frac{\dot{\beta}}{2}\,\frac{\lambda^2\xi_* - \ddot{\xi}_*}{\xi_*\ddot{\eta}_* - \eta_*\ddot{\xi}_*}\,.$$

Nun ist nach (51_2)

$$\xi_*\ddot{\eta}_* - \eta_*\ddot{\xi}_* = \frac{1}{2}\dot{\beta}\,.$$

so daß sich die Gleichungen für $\dot{\xi}_*$ und $\dot{\eta}_*$ zu

$$\left.\begin{aligned} \dot{\xi}_* &= -\lambda^2\eta_* + \ddot{\eta}_*\,, \\ \dot{\eta}_* &= +\lambda^2\xi_* - \ddot{\xi}_* \end{aligned}\right| \tag{52}$$

vereinfachen. Das System (52) stimmt mit dem auf anderem Wege gewonnenen System (41_3) völlig überein. Damit ist gezeigt, daß die durch Polarkoordinaten $a(\tau)$, $\psi(\tau)$ gegebene Bewegung (des Abschnitts 6) völlig mit der Lösung (des Abschnitts 8) in rechtwinkligen Koordinaten $x(\tau)$, $y(\tau)$ übereinstimmt.

Hinsichtlich der schnellen Frequenzen ω_N und ω_1 haben wir demnach folgenden Zusammenhang bewiesen: Während der Neigungswinkel a mit der Nutationsfrequenz ω_N um einen mittleren Wert a_m pendelt, schwingen die waagerechten Richtungswerte x und y des Achsenvektors $\mathfrak{a}$ u. a. mit der „schnellen" Frequenz ω_1. Nach (31_3), (36_1) und (45) ist

$$\omega_1 = \omega_N + \omega_P \,. \tag{53}$$

Aus (48_1) erhält man nunmehr für $\mathfrak{z} = a_0 \mathfrak{z}$

$$\mathfrak{z} = a_0 \frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_2} \left(- \frac{\omega_2}{\omega_1} e^{i \omega_1 \tau} + e^{i \omega_2 \tau} \right).$$

Nun ist wegen (47)

$$a_0 \frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{a_0}{1 - \dfrac{\Delta a}{a_m}} = a_m \,,$$

so daß $\mathfrak{z}$ die Gestalt

$$\mathfrak{z} = a_m e^{i \omega_P \tau} - \Delta a \, e^{i(\omega_N + \omega_P)\tau}$$

annimmt. Trennt man schließlich noch Real- und Imaginärteil, so kommt (Abb. 8)

$$\left.\begin{aligned} x &= a_m \cos(\omega_P \tau) - \Delta a \cos(\omega_N + \omega_P)\tau \,, \\ y &= a_m \sin(\omega_P \tau) - \Delta a \sin(\omega_N + \omega_P)\tau \,. \end{aligned}\right| \tag{54}$$

Die Richtungswerte x und y entstehen durch Überlagerung zweier Schwingungen. Die Amplitude der „langsamen" Schwingung ist gleich dem mittleren Neigungswinkel a_m, und ihre Kreisfrequenz ist gleich der Präzessionsfrequenz ω_P der Kreiselachse. Die Amplitude der „schnellen" Schwingung ist gleich der Schwankung Δa des Neigungswinkels, und ihre Frequenz ist gleich der Summe aus der Nutationsfrequenz ω_N und der Präzessionsfrequenz ω_P. Das letzte Ergebnis ist anschaulich nicht ohne weiteres zu erwarten.

10. Zweite Lösung der Bewegungsgleichungen. Im Abschnitt 5 haben wir die Bewegungsgleichungen (10) und (11) auf dem üblichen Wege gelöst, indem wir der Reihe nach die verschiedenen Komponenten s_A, s_E, s_K und s_M des bezogenen Schwunges $\mathfrak{s}$ berechneten. Die Gleichungen (10) und (11) bzw. (41_1) lassen sich nun formal einfacher [aber weniger anschaulich(!)] folgendermaßen lösen.

Multipliziert man (41_1) skalar mit $\mathfrak{e}$ und beachtet, daß $\dot{\mathfrak{e}}$ verschwindet, so kommt

$$(\mathfrak{e}\,\mathfrak{a})^{\cdot} + (\mathfrak{e}\,[\mathfrak{a}\,\dot{\mathfrak{a}}])^{\cdot} = 0$$

oder nach Integration bei Berücksichtigung der Anfangsbedingung (12) $\dot{\mathfrak{a}}(0) = 0$

$$\mathfrak{e}\,\mathfrak{a} + \mathfrak{e}\,[\mathfrak{a}\,\dot{\mathfrak{a}}] = \text{const} = \cos a_0 \,.$$

Das Produkt $\mathfrak{e}[\mathfrak{a}\,\dot{\mathfrak{a}}]$ vereinfacht sich wegen $\mathfrak{e} = \{0; 0; 1\}$ auf die Z-Komponente $\dot{\psi} \sin^2 a$ des Vektors $[\mathfrak{a}\,\dot{\mathfrak{a}}]$. Also gilt

$$\dot{\psi} \sin^2 a = \cos a_0 - \cos a \,, \tag{55}$$

was mit (24) übereinstimmt.

Eine zweite Beziehung zwischen a und ψ finden wir, indem wir (41_2) skalar mit $\ddot{\mathfrak{a}}$ multiplizieren. Es wird

$$\ddot{\mathfrak{a}}\,\dot{\mathfrak{a}} = \lambda^2 \ddot{\mathfrak{a}}\,[\mathfrak{e}\,\mathfrak{a}] = \lambda^2 \mathfrak{e}\,[\mathfrak{a}\,\ddot{\mathfrak{a}}] \,.$$

Ersetzt man $[\mathfrak{a}\ddot{\mathfrak{a}}]$ gemäß (41_2) durch $\lambda^2[\mathfrak{e}\mathfrak{a}]-\dot{\mathfrak{a}}$, so kommt

$$\left(\frac{1}{2}\left|\dot{\mathfrak{a}}\right|^2\right)^{\cdot}=\dot{\mathfrak{a}}\ddot{\mathfrak{a}}=-\lambda^2\mathfrak{e}\dot{\mathfrak{a}}=-\lambda^2(\mathfrak{e}\mathfrak{a})^{\cdot}.$$

Integration liefert mit $\dot{\mathfrak{a}}(0)=0$

$$\frac{1}{2}\left|\dot{\mathfrak{a}}\right|^2=-\lambda^2(\mathfrak{e}\mathfrak{a})+\text{konst}=\lambda^2(\cos\alpha_0-\cos\alpha)$$

oder

$$\dot{\alpha}^2+(\dot{\psi}\sin\alpha)^2=2\lambda^2(\cos\alpha_0-\cos\alpha)\,. \tag{56}$$

Entfernt man aus (55) und (56) die Ableitung $\dot{\psi}$, so findet man die Grundgleichung (21), die damit auf anderem Wege hergeleitet worden ist.

11. Zusammenfassung. Liegt der Schwung $\mathfrak{S}$ des Kreisels zu Beginn der Bewegung in der Kreiselachse $\mathfrak{a}$, so enthalten die Bewegungsgleichungen des schweren symmetrischen Kreisels vier wesentliche Parameter: das „Einheitsdrehmoment" Gl, die Querdrehmasse B, den Anfangsschwung $|\mathfrak{S}_0|=S_0=A\omega_0$ und den Neigungswinkel α_0 (der Kreiselachse $\mathfrak{a}$ gegen die Senkrechte) zu Beginn der Bewegung.

Durch Einführung dimensionsloser Größen, des „bezogenen" Schwunges $\mathfrak{s}=\mathfrak{S}/S_0$ und der „dimensionslosen Zeit" $\tau=(S_0/B)t$, läßt sich die Zahl der wesentlichen Parameter auf zwei herabsetzen, α_0 und σ, die Stabilitätszahl des schweren Kreisels.

Für einen stabilen Kreisel mit $\sigma>1$ bleibt der Neigungswinkel α „klein", wenn er am Anfang der Bewegung „klein" war und wenn σ „nicht zu dicht" bei 1 liegt (Abb. 6). In diesem Falle wird der Ablauf der Bewegung (ebenso wie eine Pendelschwingung mit kleinem Ausschlagwinkel) auch noch vom Anfangswert α_0 unabhängig. Man gewinnt also die kennzeichnenden Größen der Bewegung, den größten Neigungswinkel α_1, die Kreisfrequenzen ω_N und ω_P der Nutations- und Präzessionsbewegung und den größten Winkel δ_1 zwischen der Kreiselachse $\mathfrak{a}$ und der Schwungachse $\mathfrak{S}$ als Funktionen der Stabilitätszahl σ (Abb. 6 und 7).

Zur Beschreibung der Bewegung kann man die Lage der Kreiselachse in einem raumfesten Achsenkreuz entweder durch die Eulerschen Winkel (α, ψ) oder durch die Richtungswerte (x, y, z) kennzeichnen. Während α mit der Nutationsfrequenz ω_N um den mittleren Wert α_m schwingt und ψ mit der mittleren Winkelgeschwindigkeit ω_P wächst, enthalten die waagerechten Richtungswerte $x=a\cos\psi$ und $y=a\sin\psi$ neben der „langsamen" Präzessionsfrequenz ω_P nur noch die „schnelle" Frequenz $(\omega_N+\omega_P)$, was auf Grund der Anschauung von vornherein nicht zu vermuten ist.

(Eingegangen am 16. Dezember 1946.)

Eine Theorie der Stabilität der elastischen Bewegung.

Von **E. Mettler** in Oberhausen-Sterkrade.

1. Einleitung. In der Elastostatik weiß und beachtet man längst, daß dem Gleichgewicht eines ruhend belasteten Körpers die Eigenschaft der Stabilität oder der Instabilität (oder im Grenzfall der Indifferenz) zukommt, und die zugehörige Theorie hat schon eine weitgehende Durchbildung erfahren. Daneben ist es noch wenig bekannt, daß in der Elastokinetik die Bewegung eines zeitlich veränderlich belasteten Körpers ganz parallele Eigenschaften aufweist. Untersuchungen vorwiegend aus jüngster Zeit haben nämlich folgenden Sachverhalt gezeigt: Wenn man einen pulsierend belasteten Körper zusätzlich etwas anstößt, so daß sich über seine stationäre, erzwungene Schwingung Nachbarbewegungen lagern, so können diese Nachbarbewegungen begrenzt bleiben, unter bestimmten Umständen aber auch unbeschränkt anwachsen, so daß sich der resultierende Bewegungszustand immer mehr von dem (in diesem Falle instabilen) Ausgangszustand entfernt. Bisher sind allerdings zu dem kinetischen Stabilitätsproblem nur einige spezielle Untersuchungen ohne Einordnung in einen systematischen Zusammenhang erschienen. Sie befassen sich mit Biegeschwingungen von Saiten[1], Stäben[2] und Platten[3] unter pulsierenden Längskräften, von Kreisringen unter pulsierenden Radialkräften[4] und mit Kippschwingungen von I-Trägern unter schwingenden Axiallasten und Endmomenten[5]. Ferner habe ich in einem früheren Aufsatz[6] die Stabilitätsfrage für elastische Schwingungen, die in den eben genannten Arbeiten noch nicht ganz klar ausgesprochen war, allgemein formuliert und habe an dem Beispiel des axial pulsierend belasteten Stabes gezeigt, daß man die genannte Frage nur dann richtig beantworten kann, wenn man — genau wie in der statischen Stabilitätstheorie — in den Verzerrungs-Verschiebungs-Gleichungen nichtlineare Glieder mitnimmt, während die übliche linearisierte (klassische) Schwingungstheorie gar nicht auf Instabilitätserscheinungen führen kann.

Die folgende Arbeit stellt nun den Versuch der Grundlegung einer allgemeinen dreidimensionalen Stabilitätstheorie der elastischen Bewegung dar; ich gebe hier die allgemeine mathematische Formulierung des Stabilitätsproblems durch eine Variationsgleichung oder ein damit äquivalentes System von Differentialgleichungen. Wer dann aus diesen Gleichungen — oder in Sonderfällen auch unmittelbar aus den speziellen Gleichungen des Problems — die praktischen Stabilitätsbedingungen ableiten will, wird mit Recht den in der Elastokinetik überwiegend wichtigen Fall der durch harmonisch pulsierende Kräfte angeregten Schwingungen in den Vordergrund stellen. Dies haben in der Tat alle bisher zu unsrem Thema erschienenen Untersuchungen getan. Die vorliegende Grundlegung der Theorie soll aber ohne die genannte Einschränkung hinsichtlich der äußeren Lasten durchgeführt werden.

Den Ausgangspunkt der ganzen Untersuchung bildet die allgemeine Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen in der Form, wie sie in Weiterführung *Trefftz*scher Gedankengänge von *Kappus*[7] aufgestellt wurde, und zwar stütze ich mich besonders auf die Variationsprinzipe dieser Theorie. Zur Allgemeinheit der Ansätze sei schon hier bemerkt, daß sie im Verlauf der Untersuchung geringfügig eingeschränkt werden wird, und zwar hauptsächlich durch eine Voraussetzung über die auf ihre Stabilität zu untersuchende Ausgangsbewegung. Wesentlich ist ferner, daß alle Dämpfungseinflüsse in den Gleichungen vorläufig vernachlässigt werden müssen, obwohl gerade die Dämpfung bei der Frage der Übereinstimmung der hier vorgeführten Theorie mit der Wirklichkeit eine wesentliche Rolle spielt[2]. Die aufgestellten kinetischen Grundgleichungen

[1] *F. Melde*, Pogg. Ann. 109 (1860), S. 193 und 111 (1860), S. 513.

[2] *E. Mettler*, Mitt. Forsch. Anst. GHH.-Konzern 8 (1940) S. 1 und Forsch. Hefte a. d. Gebiete des Stahlbaues Heft 4 (1941) S. 1. – *J. Utida* and *K. Sezawa*, Aeron. Res. Inst. Tokyo, Imp. Univ., Rep. 15 (1940) S. 139. – *K. Klotter*, Forsch. Ing.-Wes. 12 (1941) S. 209.

[3] *B. A. Bodner*, J. appl. Math. a. Mech. II. 1 (1938) S. 87 (russisch).

[4] *S. Woinowsky-Krieger*, Ing.-Arch. 13 (1942) S. 90. – *G. Ju. Dzanelidze* and *M. A. Radcig*, J. appl. Math. a. Mech. IV, 5–6 (1940), S. 55 (russisch).

[5] *S. Woinowsky-Krieger*, Ing.-Arch. 13 (1942) S. 197.

[6] *E. Metiler*, Ing.-Arch. 13 (1942) S. 97.

[7] *R. Kappus*, Z. angew. Math. Mech. 19 (1939) S. 271.

erweisen sich als eine Erweiterung der von *Trefftz*[1] auf anderem Wege abgeleiteten statischen Gleichungen. Diese Tatsache ist insofern wesentlich, als sie die Analogie des statischen mit dem kinetischen Stabilitätsproblem, die sich schon in dem speziellen Beispiel des axial pulsierend belasteten Stabes gezeigt hatte[2], auch im allgemeinen Fall klar hervortreten läßt.

2. Einiges aus der Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen. Zunächst sollen ohne Beweis einige Tatsachen aus der Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen angeführt werden[3]. Wir betrachten einen beliebigen elastischen Körper aus homogenem und isotropem Material unter der Einwirkung von zeitlich konstanten oder veränderlichen Kräften. Von vornherein sei angenommen, daß die Verzerrungen des Körpers so klein bleiben, daß wir ein lineares Elastizitätsgesetz voraussetzen und die elastischen Eigenschaften des Körpers durch die üblichen Materialkonstanten E (Elastizitätsmodul) und ν (Querkontraktionszahl) kennzeichnen können.

a) Koordinatensystem. Als Koordinatensystem verwenden wir ein körperfestes Achsenkreuz x_1, x_2, x_3, das vor der Verformung (im unbelasteten Körper) rechtwinklig ist. Jeder Körperpunkt wird dauernd durch ein bestimmtes Zahlentripel (x_1, x_2, x_3) bezeichnet, welches die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes vor der Verformung bedeutet.

b) Elastische Verschiebungen. Die Körperpunkte erfahren elastische Verschiebungen mit den Komponenten u_1, u_2, u_3 in Richtung der unverformten Koordinatenachsen.

c) Geometrische Randbedingungen. Auf gewissen Oberflächenteilen sind den elastischen Verschiebungen bestimmte geometrische Bedingungen (Auflagerbedingungen) vorgeschrieben.

d) Belastungen. Im Innern des Körpers sind Volumkräfte mit den Komponenten X_1, X_2, X_3, auf gewissen Oberflächenteilen Oberflächenkräfte mit den Komponenten p_1, p_2, p_3 vorgeschrieben. Die Komponentenzerlegung bezieht sich auf die Richtung der unverformten Koordinatenachsen. Die Kräfte sollen als Ortsfunktionen zeitlich konstant oder variabel gegeben sein. Sie sollen unabhängig von den elastischen Verschiebungen ihrer Angriffspunkte sein.

e) Gittervektoren. Jedem Punkt des verformten Körpers sind drei Gittervektoren $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3$ zugeordnet, die kurz so definiert werden: Ein körperfestes Parallelepiped, das vor der Verformung die Kanten dx_1, dx_2, dx_3 in Richtung der Koordinatenachsen hat, geht durch die Verformung in das Parallelepiped mit den Kanten $\mathfrak{g}_1 dx_1, \mathfrak{g}_2 dx_2, \mathfrak{g}_3 dx_3$ über.

f) Verzerrungsgrößen. Die skalaren Produkte je zweier Gittervektoren liefern die sechs „Verzerrungsgrößen"

$$g_{ij} = \mathfrak{g}_i \mathfrak{g}_j - \delta_{ij} \qquad \left(\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j. \\ 0 \text{ für } i \neq j. \end{cases}\right)$$

Die Ausrechnung ergibt

$$g_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial u_r}{\partial x_i} \frac{\partial u_r}{\partial x_j}. \tag{1}$$

Es ist somit $g_{ij} = g_{ji}$.

g) Spannungsgrößen. Ein Parallelepiped mit den ursprünglichen Kanten dx_1, dx_2, dx_3 werde verzerrt. Auf seine Seitenfläche mit den Seiten $\mathfrak{g}_2 dx_2$ und $\mathfrak{g}_3 dx_3$ wirke die Schnittkraft $\mathfrak{k}_1 dx_2 dx_3$. Dann ist $\mathfrak{k}_1$ ein Spannungsvektor (Kraft, bezogen auf die unverzerrte Fläche). Entsprechend werden die Spannungsvektoren $\mathfrak{k}_2$ und $\mathfrak{k}_3$ definiert. Wir zerlegen die $\mathfrak{k}_i$ nach den Richtungen der drei Gittervektoren und schreiben

$$\mathfrak{k}_i = k_{i1} \mathfrak{g}_1 + k_{i2} \mathfrak{g}_2 + k_{i3} \mathfrak{g}_3.$$

Die so definierten Koeffizienten k_{ij} heißen Spannungsgrößen. Sie sind nicht identisch mit den üblichen Spannungen σ, τ der klassischen Elastizitätstheorie, gehen aber für unendlich kleine Verzerrungen in diese Spannungen über. Auch für die Spannungsgrößen gilt die Symmetriebeziehung

$$k_{ij} = k_{ji}.$$

---

[1] *E. Trefftz*, Z. angew. Math. Mech. 12 (1933) S. 160.

[2] *E. Mettler*, Ing.-Arch. 13 (1942) S. 97.

[3] Vorwiegend nach *Kappus*, Z. angew. Math. Mech. 19 (1939) S. 271.

h) Elastizitätsgesetz. Zwischen den Spannungs- und Verzerrungsgrößen bestehen die sechs linearen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} k_{ii} &= G\left(g_{ii} + \frac{\nu}{1-2\nu}\sum_{r=1}^{3} g_{rr}\right), \\ k_{ij} &= G\,g_{ij} \text{ für } i \neq j. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

wobei zur Abkürzung der Schubmodul $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ eingeführt ist.

i) Elastisches Potential. Das elastische Potential oder — bei adiabatischer Formänderung, die wir hier voraussetzen wollen — die im Körper aufgespeicherte Formänderungsarbeit ist

$$A = \frac{1}{4}\iiint \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}\,k_{ij}\,d\,x_1\,d\,x_2\,d\,x_3. \tag{3}$$

Das Raumintegral ist über den ganzen Körper zu erstrecken.

k) Potential der äußeren Kräfte. Als Potential der äußeren Kräfte bezeichnet man die negative Summe der Produkte aus den Kräften und den Verschiebungen ihrer Angriffspunkte, also den Ausdruck

$$V = -\iiint \sum_{i=1}^{3} X_i\,u_i\,d\,x_1\,d\,x_2\,d\,x_3 - \iint \sum_{i=1}^{3} p_i\,u_i\,d\,o. \tag{4}$$

Das Raumintegral ist über das Volumen, das Oberflächenintegral, in dem *do* das Flächenelement bedeutet, über die Oberfläche des Körpers zu erstrecken.

l) Variationsprinzipe. Für das elastische Gleichgewicht gilt das Prinzip der virtuellen Verrückungen

$$\delta(A+V) = o \tag{5}$$

und für die elastische Bewegung das Prinzip von *Hamilton*

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(A+V-T)\,d\,t = 0, \tag{6}$$

worin

$$T = \iiint \frac{\varrho}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\,u_i}{\partial\,t}\right)^2 d\,x_1\,d\,x_2\,d\,x_3 \tag{7}$$

die kinetische Energie, ϱ die Massendichte und t die Zeit bedeutet. Die Variationsgleichungen (5) und (6) besagen, daß die wirklich eintretenden elastischen Verschiebungen die hinter den δ-Zeichen stehenden Ausdrücke zu Extremalwerten machen. Zur Konkurrenz zugelassen sind dabei alle Verschiebungen, die für alle Zeit die geometrischen Randbedingungen erfüllen und im Falle der Bewegung überdies zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 im ganzen Körper mit den wirklichen Verschiebungen zusammenfallen.

Zur Begründung der Gleichungen (5) und (6) kurz das folgende: Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für endliche elastische Verschiebungen hat *Kappus* a. a. O. abgeleitet. Das Prinzip von Hamilton bringt er nicht explizite. Es folgt aber unmittelbar aus der in der klassischen wie in der Elastizitätstheorie der endlichen Verschiebungen geltenden Arbeitshauptgleichung für bewegte Körper

$$\delta A = \iiint \sum_{i=1}^{3} X_i\,\delta\,u_i\,d\,x_1\,d\,x_2\,d\,x_3 + \iint \sum_{i=1}^{3} p_i\,\delta\,u_i\,d\,o - \iiint \sum_{i=1}^{3} \varrho\,\frac{\partial^2 u_i}{\partial\,t^2}\,\delta\,u_i\,d\,x_1\,d\,x_2\,d\,x_3, \tag{8}$$

wenn man diese Gleichung zwischen t_1 und t_2 nach t integriert und die aus der klassischen Theorie wohlbekannten Umformungen ausführt.

Mit (5) und (6) sind die Probleme des elastischen Gleichgewichts und der elastischen Bewegung endlicher Verschiebungen durch Variationsgleichungen ausgedrückt. Man kann von ihnen aus nach den Regeln der Variationsrechnung zu den Verschiebungsdifferentialgleichungen und den Gleichungen der dynamischen Randbedingungen gelangen. Da in (3) unter dem Integralzeichen ein Polynom vierten Grades der Verschiebungsableitungen steht, werden die Differentialgleichungen nicht linear. Die beiden genannten Darstellungen sind äquivalente Darstellungen

der Probleme. Wir bleiben für die weiteren Untersuchungen zunächst bei den Variationsgleichungen.

3. Allgemeine Formulierung des Stabilitätsproblems. Die Behandlung der hier zur Diskussion stehenden Stabilitätsfrage gründen wir auf das altbekannte und in der ganzen Mechanik benutzte Prinzip, das in der Kinetik den Namen „Methode der kleinen Schwingungen" trägt. Vorgelegt sei als Grundzustand ein bestimmter, auf seine Stabilität zu untersuchender Gleichgewichts- oder Bewegungszustand mit den Verschiebungen $u_i^{(0)}$, die ein Lösungssystem der Gleichung (5) bzw. (6) darstellen. Wir fragen nach dem „gestörten" Zustand oder dem „Nachbarzustand"

$$u_i = u_i^{(0)} + \bar{u}_i \tag{9}$$

unter den gleichen Lasten und Auflagerbedingungen, wobei die $\bar{u}_i$ kleine, streng genommen sogar infinitesimale Zusatzverschiebungen bedeuten, deren Charakter Auskunft über die Stabilitätseigenschaften des Grundzustandes geben soll, wie sogleich noch näher ausgeführt wird. Die Berechnung der $\bar{u}_i$ beginnt damit, daß wir (9) in die Ausdrücke $A+V$ bzw. $A+V-T$ einführen und nun in den Variationsgleichungen (5) bzw. (6) die $\bar{u}_i$ als unbekannte Funktionen betrachten. Die in $A+V$ bzw $A+V-T$ unter den Integralzeichen stehenden Ausdrücke können nach Potenzen der Ableitungen der $\bar{u}_i$ entwickelt und die Entwicklungen wegen der Kleinheit der $\bar{u}_i$ hinter den quadratischen Gliedern abgebrochen werden. Damit ist die Bestimmung des gestörten Zustandes auf ein lineares Problem zurückgeführt: in den Eulerschen Differentialgleichungen der Variationsrechnung erscheinen ja nur noch lineare Glieder. Die Auflösung der Gleichungen im Einzelfall ist eine rein mathematische Aufgabe, die durch die Linearisierung jedenfalls erheblich erleichtert ist.

Bleiben wir in der Statik, d. h. untersuchen wir nur Nachbargleichgewichtszustände zu Grundgleichgewichtszuständen mittels (5), so kann allerdings das beschriebene Verfahren für sich allein nicht zur vollständigen Lösung des Stabilitätsproblems führen. Man kommt nämlich mathematisch gesprochen auf ein lineares Eigenwertproblem, das nur für bestimmte kritische Werte der Belastung Lösungen besitzt und damit Nachbargleichgewichtszustände liefert, für alle andern Lasten dagegen einfach die Lösung Null hat. Man findet also die Verzweigungspunkte des Gleichgewichts. Ob aber der Grundzustand außerhalb dieser Verzweigungspunkte stabil oder labil ist, d. h. ob der elastische Körper bei einer kleinen Störung des Grundzustandes in diesen zurückstrebt oder sich weiter von ihm entfernen will, kann man natürlich nicht aus den nicht existierenden Nachbargleichgewichtszuständen, sondern nur durch besondere Untersuchungen erkennen, die üblicherweise an die Energieverhältnisse anknüpfen.

In der Kinetik dagegen erledigt das Hamiltonsche Prinzip (6) mit den aus ihm abgeleiteten Gleichungen die Stabilitätsfrage vollständig, und zwar deshalb, weil Nachbarbewegungen zu irgendeinem Grundzustand ja immer existieren[1]. Daher läßt sich immer feststellen, ob sich die durch eine kleine Störung entstehende Nachbarbewegung in der Nähe des Grundzustandes hält oder die Tendenz hat, sich von dem Grundzustand zu entfernen. Das ist die Entscheidung zwischen Stabilität und Labilität, wie man sie anschaulich aus dem Charakter des Bewegungsverlaufs abliest. In schärferer Formulierung sprechen wir unter Anlehnung an den Stabilitätsbegriff der allgemeinen Mechanik[2] dann von Stabilität des Grundzustandes, wenn die Beträge der $\bar{u}_i$ dadurch für alle Zeit beliebig klein gehalten werden können, daß man die Anfangsstörung (d. h. die willkürlich gewählten Verschiebungen $\bar{u}_i$ und Geschwindigkeiten $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}$ zu einem beliebigen Anfangszeitpunkt) absolut genommen klein genug macht. Wenn dagegen für die $\bar{u}_i$ keine obere Schranke existiert, die mit der Anfangsstörung gegen Null strebt, so heißt der Grundzustand labil.

Durch Berechnung der Nachbarbewegungen kann man also die Stabilitätseigenschaften einer elastischen Bewegung untersuchen, aber auch eines elastischen Gleichgewichts. Das Gleichgewicht erscheint in diesem Zusammenhang einfach als Sonderfall der Bewegung und wird deshalb im folgenden automatisch mitbehandelt. Doch sollen der Vollständigkeit halber auch die aus (5) folgenden rein statischen Gleichungen mit angeschrieben werden.

---

[1] Es sei hier gestattet, diese Behauptung ohne Heranziehung mathematischer Existenzbeweise unter Berufung auf die physikalische Anschauung auszusprechen.

[2] Vgl. *Ph. Frank* und *R. v. Mises*, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Bd. II, 2. Aufl., Braunschweig 1935, S. 129. – *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Über die Theorie des Kreisels, Leipzig 1897–1910, S. 342.

Nun zur wirklichen Aufstellung der Bestimmungsgleichungen für die Zusatzverschiebungen u_i. Wir führen dazu den Ansatz (9) zunächst in (1) ein. Bezeichnen wir mit dem

Index oben $^{(0)}$ Glieder nullten Grades,
oben $^{(1)}$ Glieder ersten Grades,
oben $^{(2)}$ Glieder zweiten Grades

in den $\bar{u}_i$,

so wird allgemein

$$g_{ij} = g_{ij}^{(0)} + g_{ij}^{(1)} + g_{ij}^{(2)}.$$

Ebenso setzen sich auch die k_{ij} nach (1) und (2) aus „konstanten", linearen und quadratischen Gliedern zusammen:

$$k_{ij} = k_{ij}^{(0)} + k_{ij}^{(1)} + k_{ij}^{(2)}.$$

Dann kommt aus (3), (4) und (7)

$$A = A^{(0)} + A^{(1)} + A^{(2)} + \text{Glieder dritten und vierten Grades, die weggelassen werden.}$$
$$V = V^{(0)} + V^{(1)} + V^{(2)},$$
$$T = T^{(0)} + T^{(1)} + T^{(2)},$$

und es wird

$$A^{(1)} = \frac{1}{4}\iiint \sum_{i,j=1}^{3} \left(g_{ij}^{(0)} k_{ij}^{(1)} + g_{ij}^{(1)} k_{ij}^{(0)} \right) d x_1 \, d x_2 \, d x_3 , \tag{10}$$

$$A^{(2)} = \frac{1}{4}\iiint \sum_{i,j=1}^{3} \left(g_{ij}^{(0)} k_{ij}^{(2)} + g_{ij}^{(1)} k_{ij}^{(1)} + g_{ij}^{(2)} k_{ij}^{(0)} \right) d x_1 \, d x_2 \, d x_3 , \tag{11}$$

$$V^{(1)} = -\iiint \sum_{i=1}^{3} X_i \bar{u}_i \, d x_1 \, d x_2 \, d x_3 - \iint \sum_{i=1}^{3} p_i \bar{u}_i \, d o ,$$

$$V^{(2)} = 0 ,$$

$$T^{(1)} = \iiint \varrho \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial t} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} \, d x_1 \, d x_2 \, d x_3 ,$$

$$T^{(2)} = \iiint \frac{\varrho}{2} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} \right)^2 d x_1 \, d x_2 \, d x_3 . \tag{12}$$

Die Glieder $A^{(0)}$, $V^{(0)}$ und $T^{(0)}$ interessieren nicht, da sie in (5) und (6) als „Konstante" nicht variiert werden und deshalb wegfallen. Ferner ist festzustellen, daß

$$\int_{t_1}^{t_2} (A^{(1)} + V^{(1)} - T^{(1)}) \, dt = 0 \quad \text{(für die Bewegung)}$$

bzw.

$$A^{(1)} + V^{(1)} = 0 \quad \text{(für die Ruhe)}$$

gilt, weil die in diesen Gleichungen links stehenden Ausdrücke einfach die ersten Variationen von $\int_{t_1}^{t_2} (A + V - T) \, dt$ bzw. $A + V$ darstellen, wobei für die δu_i die speziellen Variationen $\bar{u}_i$ gesetzt sind, und der Grundzustand $u_i^{(0)}$ voraussetzungsgemäß der Gleichung (6) bzw. (5) genügt.

Damit geht (5) und (6) über in

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (A^{(2)} - T^{(2)}) \, d t = 0 \quad \text{(kinetische Gleichung).} \tag{13}$$

$$\delta A^{(2)} = 0 \quad \text{(statische Gleichung).} \tag{14}$$

Variiert werden darin die $\bar{u}_i$.

Die Variationsgleichungen (13) und (14) bestimmen die Nachbargleichgewichtszustände bzw. Nachbarbewegungen zum Grundzustand vollständig. Sie formulieren also die Stabilitätsprobleme

in allgemeinster Form — wobei hinsichtlich der Gleichung (14) der reinen Statik die oben diskutierte Einschränkung gilt —, und zwar zunächst in der Form von Variationsprinzipen, aus denen man aber sofort die zugehörigen (linearen) Eulerschen Differentialgleichungen für die $\bar{u}_i$ findet. Die ausführliche Gestalt von (13) und (14) läßt sich aus den angeschriebenen Formeln leicht aufstellen, ebenso die der zugehörigen Eulerschen Differentialgleichungen. Doch verzichten wir darauf, weil die Theorie in ihrer allgemeinsten Form hier nicht weiter verfolgt werden soll.

4. Beschränkung auf „linearisierte" Grundzustände. Um zu übersichtlichen und der praktischen Verwertung leichter zugänglichen Ergebnissen zu kommen, machen wir eine Einschränkung bezüglich des Grundzustandes. Es sollen nämlich weiterhin nur solche Grundzustände betrachtet werden, die sich genügend genau nach der klassischen Elastizitätstheorie berechnen lassen. Die klassische Theorie ist bekanntlich dadurch gekennzeichnet, daß sie sehr kleine Verschiebungen und Verschiebungsableitungen voraussetzt und deshalb den Zusammenhang zwischen den Verzerrungen und den Verschiebungen linearisieren sowie die Gleichgewichtsbedingungen am unverzerrten Körper erfüllen darf.

Inwieweit wird nun durch die ausgesprochene Voraussetzung die Tragweite unsrer Theorie begrenzt? Diese Frage kann natürlich erst dann vollständig beantwortet werden, wenn der Geltungsbereich der klassischen Theorie vollständig angegeben werden kann, was bei dem heutigen Stand unsrer Erkenntnis nicht allgemein möglich ist. Es ist aber anzunehmen, daß unsre Voraussetzung praktisch keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit der Theorie bedeutet. Bisher hat es sich ja als beinahe charakteristisch für Stabilitätsprobleme gezeigt, daß die Grundzustände neben den viel komplizierteren Nachbarzuständen recht einfach und mit verhältnismäßig elementaren, der linearisierten (klassischen) Theorie angehörenden Mitteln erfaßbar sind. Auf statischem Gebiet liegen in der Tat solche „linearisierte" Grundgleichgewichtszustände zumindest der überwiegenden Mehrzahl der praktisch wichtigen Einzelprobleme der Stabilität zugrunde[1]. Auch die *Trefftz*sche allgemeine Theorie der statischen Stabilität[2] fußt auf ihnen. In der Elastokinetik ist erst recht kein wichtiger Fall bekannt, der durch unsere Voraussetzung ausgeschlossen würde. Man hat, soviel ich sehe, bei der Berechnung der durch zeitlich veränderliche Kräfte erzwungenen Bewegung eines elastischen Körpers die klassische Elastizitätstheorie bisher überhaupt noch nicht verlassen — ausgenommen eben die in der Einleitung aufgeführten Schwingungsuntersuchungen, die aber überall da, wo es sich um eine reine Stabilitätsbetrachtung in dem oben dargelegten Sinne handelt, wiederum von einem „linearisierten" Grundbewegungszustand ausgehen.

Unsere Annahme besagt, daß die $k_{ij}^{(0)}$ nun mit den üblichen Spannungen σ, τ der klassischen Elastizitätstheorie übereinstimmen und den bekannten, am unverformten Körperelement aufgestellten Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial k_{ij}^{(0)}}{\partial x_i} + X_j = \begin{cases} \varrho \dfrac{\partial^2 u_j^{(0)}}{\partial t^2} & \text{für bewegte Körper,} \\ 0 & \text{für ruhende Körper} \end{cases} \tag{15}$$

im Innern sowie

$$\sum_{i=1}^{3} k_{ij}^{(0)} \cos(n, x_i) = p_j \tag{16}$$

an der Oberfläche mit der Normalen n genügen. Geht man mit diesen Beziehungen für bewegte Körper in die Arbeitshauptgleichung (8), für ruhende Körper in die entsprechende Hauptgleichung hinein, so folgt durch partielle Integration sofort

$$\delta A = \iiint \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}^{(0)} \frac{\partial\, \delta u_i}{\partial x_j} \, d x_1 \, d x_2 \, d x_3 . \tag{17}$$

---

[1] Es lassen sich allerdings auch Beispiele konstruieren, in denen man schon bei der Berechnung des Grundgleichgewichtszustandes über die klassische Theorie hinausgehen muß. Soll beispielsweise die Kippstabilität eines Trägers untersucht werden, der durch Quer- und Längskräfte beansprucht ist, wobei die letzteren beinahe die Knicklast erreichen, so ist für den Grundgleichgewichtszustand die bekannte Gleichung für „Knickbiegung" zuständig, die nicht in den Rahmen der klassischen Theorie fällt. Doch darf man wohl solche Fälle als Ausnahmen bezeichnen.

[2] *E. Trefftz*, Z. angew. Math. Mech. 12 (1933) S. 160.

Diese Form muß auf Grund unserer Annahme die erste Variation von A annehmen, und sie muß sie auch behalten, wenn wir in (17) die speziellen Variationen $\delta u_i = \bar{u}_i$ einführen, wodurch nach der oben eingeführten Bezeichnung $\delta A = A^{(1)}$ wird.

Nun ist, wie man aus (2) sofort erkennt,

$$g_{ij}^{(0)}\, k_{ij}^{(1)} = g_{ij}^{(1)}\, k_{ij}^{(0)} \quad \text{für } i \neq j\,.$$

Ferner erhält man durch Umordnung

$$\sum_{i=1}^{3} g_{ii}^{(0)}\, k_{ii}^{(1)} = \sum_{i=1}^{3} g_{ii}^{(0)}\, G\left(g_{ii}^{(1)} + \frac{\nu}{1-2\nu} \sum_{r=1}^{3} g_{rr}^{(1)} \right) = \sum_{i=1}^{3} g_{ii}^{(1)}\, G\left(g_{ii}^{(0)} + \frac{\nu}{1-2\nu} \sum_{r=1}^{3} g_{rr}^{(0)} \right) = \sum_{i=1}^{3} g_{ii}^{(1)}\, k_{ii}^{(0)}\,.$$

Also wird nach (10)

$$A^{(1)} = \frac{1}{2} \iiint \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}^{(0)}\, g_{ij}^{(1)}\, d\,x_1\, d\,x_2\, d\,x_3\,. \tag{18}$$

Schreibt man (17) und (18) ausführlich nebeneinander auf, wobei die Beziehungen $k_{ij}^{(0)} = k_{ji}^{(0)}$ und $g_{ij}^{(1)} = g_{ji}^{(1)}$ berücksichtigt werden, so liest man durch Koeffizientenvergleich sofort

$$g_{ij}^{(1)} = \frac{\partial\, \bar{u}_i}{\partial\, x_j} + \frac{\partial\, \bar{u}_j}{\partial\, x_i} \tag{19}$$

ab. In dieser vereinfachten Form sind infolge unserer Annahme die in den $\bar{u}_i$ linearen Glieder der g_{ij} in der Rechnung mitzuführen. Daneben seien auch die in den $\bar{u}_i$ linearen Glieder der k_{ij} besonders vermerkt:

$$\left.\begin{aligned} k_{ii}^{(1)} &= G\left(g_{ii}^{(1)} + \frac{\nu}{1-2\nu} \sum_{r=1}^{3} g_{rr}^{(1)} \right). \\ k_{ij}^{(1)} &= G\, g_{ij}^{(1)} \quad \text{für } i \neq j\,. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Nun soll ausgerechnet werden, welche Form $A^{(2)}$ auf Grund der Beziehung (19) annimmt. Durch eine Umordnung, die genau wie die eben vorgenommene verläuft, findet man

$$g_{ij}^{(0)}\, k_{ij}^{(2)} = k_{ij}^{(0)}\, g_{ij}^{(2)} \qquad \text{für } i \neq j.$$

$$\sum_{i=1}^{3} g_{ii}^{(0)}\, k_{ii}^{(2)} = \sum_{i=1}^{3} k_{ii}^{(0)}\, g_{ii}^{(2)}\,.$$

Damit entsteht aus (11)

$$A^{(2)} = \frac{1}{4} \iiint \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}^{(1)}\, k_{ij}^{(1)}\, d\,x_1\, d\,x_2\, d\,x_3 + \frac{1}{2} \iiint \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}^{(0)}\, g_{ij}^{(2)}\, d\,x_1\, d\,x_2\, d\,x_3\,. \tag{21}$$

Das erste Integral von (21) hat folgende einfache mechanische Bedeutung: Nach (19) sind die $g_{ji}^{(1)}$ für $i = j$ gleich den doppelten Dehnungen ε_i, für $i \neq j$ gleich den Schiebungen γ_{ij} der klassischen Theorie. Ferner hängen die $g_{ij}^{(1)}$ mit den $k_{ij}^{(1)}$ gemäß den auch in der klassischen Theorie bestehenden Beziehungen (20) zusammen. Die $k_{ij}^{(1)}$ sind also die von den Zusatzverschiebungen $\bar{u}_i$ geweckten Spannungen der klassischen Theorie. Also ist das erste Integral von (21) einfach gleich derjenigen Formänderungsarbeit, die man nach der klassischen Theorie erhält, wenn man dem Körper ohne Vorbelastung und Vorverformung (also „von Null aus") die Verschiebungen $\bar{u}_i$ erteilt. Wir bezeichnen diese Arbeit abkürzend mit A_{klass}. Das zweite Integral von (21) stellt mechanisch den quadratischen Teil der Arbeit der Zusatzverschiebungen $\bar{u}_i$ an den Grundspannungen $k_{ij}^{(0)}$ dar. Schreiben wir für diese Zusatzarbeit A_{zus} und berücksichtigen wir (1), so kommt schließlich in endgültiger Fassung

$$\left.\begin{aligned} A^{(2)} &= A_{\text{klass}} + A_{\text{zus}} \\ \text{mit} \quad A_{\text{klass}} &= \frac{1}{4} \iiint \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}^{(1)}\, g_{ij}^{(1)}\, d\,x_1\, d\,x_2\, d\,x_3\,. \\ A_{\text{zus}} &= \frac{1}{2} \iiint \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}^{(0)} \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial\, \bar{u}_r}{\partial\, x_i}\, \frac{\partial\, \bar{u}_r}{\partial\, x_j}\, d\,x_1\, d\,x_2\, d\,x_3\,. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Mit diesem Ausdruck für $A^{(2)}$, dem Ausdruck (12) für $T^{(2)}$ und den ergänzenden Beziehungen (19) und (20) sind die Variationsgleichungen (13) und (14) als Bestimmungsgleichungen für die Zusatzverschiebungen $\bar{u}_i$ explizite angeschrieben. Die Stabilitätsprobleme haben damit unter der in diesem Abschnitt getroffenen Beschränkung auf linearisierte Grundzustände ihre allgemeine und vollständige mathematische Formulierung gefunden. Neben die Schreibweise der Variationsrechnung tritt gleichwertig die Differentialgleichungsdarstellung, die im folgenden gleichfalls angegeben werden soll.

Die Gleichungen (14) und (22) hat auch *Trefftz*[1] aufgestellt, allerdings auf einem andern, nur für die statischen Stabilitätsprobleme gangbaren Weg. Wir dürfen bei der Berechnung der ersten Variation von $A^{(2)}$ auf die *Trefftz*sche Arbeit zurückgreifen und entnehmen ihr den Ausdruck[1]

$$\delta A^{(2)} = -\iiint \sum_{r=1}^{3} \delta \bar{u}_r \left[\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial k_{rj}^{(1)}}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_{ij}^{(0)} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x_i} \right) \right] dx_1\, dx_2\, dx_3 + \iint \sum_{r=1}^{3} \delta \bar{u}_r \left[\sum_{j=1}^{3} k_{rj}^{(1)} \cos(n, x_j) + \sum_{j=1}^{3} p_j \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x_j} \right] do. \tag{23}$$

Daneben stellen wir die bekannte Variation von $T^{(2)}$

$$\delta T^{(2)} = -\iiint \varrho \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial t^2} \delta \bar{u}_r\, dx_1\, dx_2\, dx_3. \tag{24}$$

Soll nun die Gleichung (13) $\int_{t_1}^{t_2} (\delta A^{(2)} - \delta T^{(2)})\, dt = o$ für alle zulässigen Variationen $\delta \bar{u}_r$ erfüllt sein, so müssen nach der üblichen Schlußweise der Variationsrechnung die Faktoren von $\delta \bar{u}_r$ in dem Oberflächenintegral einerseits und in dem durch Subtraktion von (23) und (24) zusammengezogenen Raumintegral andererseits für sich verschwinden. Nach kurzer Rechnung folgt daraus das lineare homogene Differentialgleichungssystem (für $r = 1, 2, 3$)

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial k_{jr}^{(1)}}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_{ij}^{(0)} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x_i} \right) = \varrho \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial t^2} \tag{25}$$

mit den gleichfalls linearen und homogenen Randbedingungen

$$\sum_{j=1}^{3} k_{rj}^{(1)} \cos(n, x_j) + \sum_{j=1}^{3} p_j \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x_j} = 0 \tag{26}$$

an der Körperoberfläche. Damit sind die Differentialgleichungen für die Zusatzverschiebungen $\bar{u}_i$ im kinetischen Fall aufgeschrieben. Die aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen folgenden rein statischen Gleichungen erhält man einfach dadurch, daß man in (25) das auf der rechten Seite stehende Beschleunigungsglied durch Null ersetzt, während (26) unverändert bestehen bleibt.

Die Betrachtung des Systems (25), (26), zu dem wiederum ergänzend die Gleichungen (19), (20) treten, läßt erkennen, daß die Zusatzverschiebungen $\bar{u}_i$ Bedingungen gehorchen, die den Bedingungen (15), (16) für die Grundverschiebungen $u_i^{(0)}$ eng verwandt sind. Die mathematische und mechanische Bedeutung von (25), (26) mag durch einige Bemerkungen etwas näher erläutert werden.

Die statischen Gleichungen $\left(\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial t^2} = 0\right)$ bestimmen die Nachbargleichgewichtslagen zum Grundgleichgewichtszustand. Das Problem ist mathematisch gesprochen ein Eigenwertproblem. Zusatzverschiebungen $\bar{u}_i \neq 0$ existieren nur für bestimmte kritische Werte (Eigenwerte) der Belastungen X_i, p_i und damit der von ihnen abhängenden Grundspannungen $k_{ij}^{(0)}$. Man wird so, wie schon früher erwähnt, auf die Verzweigungspunkte des Gleichgewichts geführt.

Die kinetischen Gleichungen (25) bestimmen, solange die äußeren Lasten und damit die $k_{ij}^{(0)}$ zeitlich konstant bleiben, die Eigenschwingungen des vorbelasteten Körpers. Setzen wir

$$\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3, t) = U_i(x_1, x_2, x_3) \cos \omega t \tag{27}$$

und bezeichnen wir abkürzend den Differentialausdruck auf der linken Seite von (25) mit $D_r(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$, so wird aus (25)

$$D_r(U_1, U_2, U_3) + \varrho \omega^2 U_r = 0, \tag{28}$$

[1] *E. Trefftz*, Z. angew. Math. Mech. 12 (1933) S. 160. Vgl. die Gleichungen (26), (27) und (28) der *Trefftz*schen Arbeit.

während (26) in den U_i genau so lautet wie in den $\bar{u}_i$. Das System (28) drückt wieder ein lineares Eigenwertproblem aus. Diesmal ist aber das von der Belastung abhängige Quadrat der Eigenfrequenz ω der unbekannte Eigenwert. Solange ω^2 positiv herauskommt, liegen als Nachbarbewegungen der Grundgleichgewichtslage wirkliche (begrenzte) Schwingungen vor. Die Grundgleichgewichtslage ist dann stabil. Ist ein Eigenwert $\omega = 0$ vorhanden, so ist die zugehörige Nachbarbewegung (Eigenschwingung) zur Nachbargleichgewichtslage ausgeartet. Sie genügt dann nach (28), wie es sein muß den statischen Gleichungen $D_r = 0$; der Grundzustand befindet sich an der Stabilitätsgrenze. Tritt schließlich ein negativer Eigenwert $\omega^2 = -a^2$ auf, so enthält die zugehörige Lösung (27) den Faktor $\cos \omega t = \mathfrak{Cos}\, at$, der ein unbegrenztes Anwachsen der Nachbarbewegungen bedeutet. Hier liegt Instabilität der Grundgleichgewichtslage vor. Diese Andeutungen mögen als Hinweis darauf genügen, daß die Eigenwertaufgabe (28) die statische Stabilitätsfrage vollständig umfaßt.

Sind die äußeren Lasten X_i und p_i und damit auch die Grundspannungen $k_{ij}^{(0)}$ Funktionen der Zeit, so liegen in den Stabilitätsgleichungen (25) und (26) lineare partielle Differentialgleichungen und lineare Randbedingungen mit zeitabhängigen Koeffizienten vor. Über die Gewinnung und den Charakter der Lösungen $\bar{u}_i$ dieser Gleichungen läßt sich allgemein nichts aussagen. Das Stabilitätsverhalten einer Grundbewegung kann erst dann beurteilt werden, wenn die Nachbarbewegungen wirklich berechnet sind. Doch soll die Integrationstheorie der kinetischen Stabilitätsgleichungen nicht Gegenstand der vorliegenden Abhandlung sein. Wirklich gelöst worden sind die Gleichungen bisher nur in einigen Sonderfällen, die in der Einleitung (Fußnote [1] bis [5] von S. 1) genannt und alle nach der hier entwickelten Theorie behandelbar sind.

5. Ein Beispiel. Wenn man von der allgemeinen Theorie zu konkreten Einzelfällen der Stabilität der Stäbe, Platten usw. übergeht, so nützt man zweckmäßig die in der Festigkeitslehre üblichen Vereinfachungen aus und kann dadurch oft eine recht kurze und übersichtliche Form der Stabilitätsgleichungen erreichen. Die wichtigste Arbeit ist in jedem Fall die Berechnung von $A^{(2)}$. Sie vollzieht sich in zwei Schritten entsprechend der Zusammensetzung von $A^{(2)}$ aus den beiden Summanden A_{Klass} und A_{zus}: Für das Glied A_{Klass} kann kurzerhand der in der technischen Festigkeitslehre gebrauchte Ausdruck für die Formänderungsarbeit der Zusatzverformungen eingesetzt werden. A_{zus} berechnet man am zuverlässigsten, indem man für die Verschiebungen $\bar{u}_i$ einen möglichst einfachen, aber doch genügend allgemeinen Ansatz macht und mit diesem in den Ausdruck (22) für A_{zus} hineingeht. Weniger systematisch läßt sich A_{zus} auch häufig auf Grund seiner mechanischen Bedeutung als Arbeit der Zusatzverschiebungen an den Grundspannungen direkt anschreiben. Neben $A^{(2)}$ ist noch die kinetische Energie $T^{(2)}$ der Zusatzverschiebungen auszurechnen, wobei wiederum alle in der technischen Schwingungslehre gebräuchlichen Vereinfachungen zu Hilfe genommen werden dürfen. Dann ist die Aufstellung der grundlegenden Variationsgleichung geleistet.

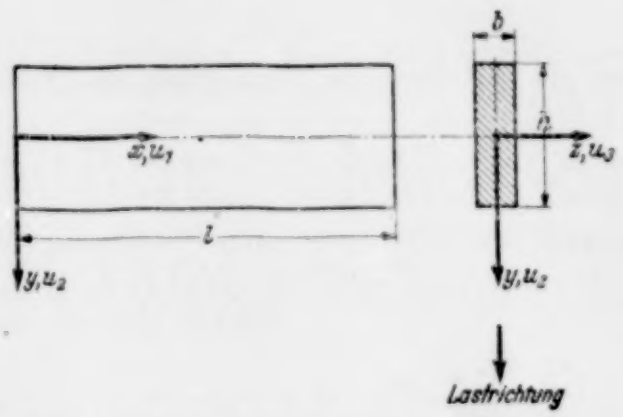


Abb. 1. Der Stab des Beispiels im Koordinatensystem.

Wir geben zur Veranschaulichung der Methode ein einfaches Beispiel, und zwar sei der schon von *Trefftz* a. a. O. behandelte kippende Rechteckstreifen in etwas allgemeinerer Fassung ausgewählt.

Um den Anschluß an die üblichen Bezeichnungen der Festigkeitslehre zu erhalten, schreiben wir in diesem Abschnitt nicht mehr x_1, x_2, x_3, sondern x, y, z für die Koordinaten. Wir betrachten einen geraden Träger der Länge l mit schmalem Rechteckquerschnitt (Breite b, Höhe h, Trägheitsmomente J_y und J_z, Abb. 1). Über die Lagerung sei zunächst noch nichts Bestimmtes ausgesagt. Jedes Ende kann eingespannt, gelenkig, aber unverdrillbar gelagert oder (bei eingespanntem anderem Ende) frei sein. Der Stab werde durch äußere Kräfte oder Biegemomente in y-Richtung ausgebogen. Es ist bekannt, daß der Balken bei genügend hoher statischer Belastung kippen, d. h. den Lasten unter Verdrehung seitlich in z-Richtung ausweichen kann. Wir stellen nun die Frage, ob der Träger auch bei zeitlich veränderlichen Lasten Instabilitätserscheinungen zeigen kann.

Durch die äußeren Lasten und Momente wird an dem Stab eine bestimmte Biegebewegung in y-Richtung hervorgerufen, die als Grundbewegung zu gelten hat, und damit über die ganze Stablänge ein bestimmtes Biegemoment $M(x,t)$ erzeugt. Im Grundzustand sind also die Spannungen $k_{11}^{(0)}=\sigma_x$ und $k_{12}^{(0)}=\tau_{xy}$ vorhanden, die den Bedingungen

$$\sigma_x=\frac{My}{J_z} \quad \text{und} \quad \iint \tau_{xy}\,dx\,dy=\frac{\partial M}{\partial x} \tag{29}$$

genügen. Als Nachbarbewegung fassen wir eine zusätzliche Ausbiegung des Stabes in y- und z-Richtung mit gleichzeitiger Verdrehung um die Stabachse ins Auge. Verschiebungen in x-Richtung dürfen außer Betracht bleiben.

Nun zur Bestimmung der verschiedenen Arbeiten. Wir bezeichnen mit

$v(x,t)$	die zusätzliche Ausbiegung der Stabachse in y-Richtung,
$w(x,t)$	die zusätzliche Ausbiegung der Stabachse in z-Richtung,
$\vartheta(x,t)$	den Verdrehwinkel der Querschnitte um die Stabachse,
GJ_d	die Torsionssteifigkeit,
i_p	den polaren Trägheitsradius des Querschnitts,
μ	die Masse des Trägers pro Längeneinheit.

Dann ist die Formänderungsarbeit der Zusatzverschiebungen, wie bekannt,

$$A_{\text{klass}}=\frac{EJ_z}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx+\frac{EJ_y}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx+\frac{GJ_d}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)^2 dx, \tag{30}$$

ebenso die kinetische Energie

$$T^{(2)}=\frac{\mu}{2}\int_0^l\left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2+i_p^2\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)^2\right]dx. \tag{31}$$

Zur Berechnung der Arbeit A_{zus} machen wir für die Zusatzverschiebungen den leicht verständlichen Ansatz

$$\left.\begin{aligned}\bar u_1&=0,\\ \bar u_2&=v-\vartheta z,\\ \bar u_3&=w+\vartheta y,\end{aligned}\right| \tag{32}$$

der die angenommene Verformung des Stabes in vereinfachter Weise berücksichtigt. Dann ist nach (22)

$$A_{\text{zus}}=\frac{1}{2}\iiint\sigma_x\left[\left(\frac{\partial\bar u_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar u_3}{\partial x}\right)^2\right]dx\,dy\,dz+\iiint\tau_{xy}\left[\frac{\partial\bar u_2}{\partial x}\frac{\partial\bar u_2}{\partial y}+\frac{\partial\bar u_3}{\partial x}\frac{\partial\bar u_3}{\partial y}\right]dx\,dy\,dz,$$

woraus mit (32) nach kurzer Rechnung unter Berücksichtigung der Beziehungen $\iint y\,dy\,dz=\iint yz\,dy\,dz=\iint yz^2\,dy\,dz=\iint y^3\,dy\,dz=\iint\tau_{xy}\,y\,dy\,dz=0$ und $\iint y^2\,dy\,dz=J_z$ sowie der Gleichungen (29) der einfache Ausdruck

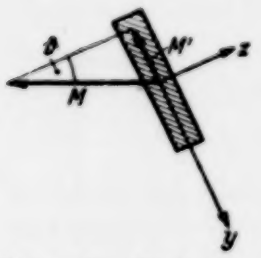


Abb. 2. Zur Berechnung von A_{zus}

$$A_{\text{zus}}=\int_0^l M\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\,dx+\int_0^l\frac{\partial M}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\vartheta\,dx$$

oder

$$A_{\text{zus}}=\int_0^l\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(M\vartheta)\,dx \tag{33}$$

folgt.

Die Beziehung (33) kann man auch durch eine einfache mechanische Betrachtung gewinnen. Wenn sich ein Querschnitt um den Winkel ϑ verdreht (Abb. 2), so wirft das Grundmoment M die Komponente $M'=-M\vartheta$ in die (verdrehte) y-Richtung. $\bar M=-EJ_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ist das Moment infolge der Verbiegung w; es fällt gleichfalls in die y-Richtung. Daher leistet das Moment $\bar M$ bei der Verbiegung w die Arbeit

$$A_{\text{zus}}=-\int_0^l\frac{M'\bar M}{EJ_y}\,dx=-\int_0^l M\vartheta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,dx.$$

Durch partielle Integration folgt daraus

$$A_{zus} = -\left[M\vartheta\frac{\partial w}{\partial x}\right]_0^l + \int_0^l \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(M\vartheta)\,dx\,.$$

worin das erste Glied rechts bei allen angenommenen Lagerungsarten verschwindet. Damit sind wir wieder auf die Größe (33) zurückgekommen.

Mit (30), (31) und (33) sind die den allgemeinen Ausdrücken (12) und (22) entsprechenden Terme der Variationsgleichung (13) für unser Beispiel ausgerechnet. Von (13) gelangt man nach den Regeln der Variationsrechnung, auf die wir hier nicht einzugehen brauchen, zu den Differentialgleichungen

$$EJ_z\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0\,, \tag{34}$$

$$\left.\begin{aligned} EJ_y\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(M\vartheta) + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0\,,\\ GJ_d\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + M\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu i_p^2\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

und die Randbedingungen werden für ein eingespanntes Ende

$$v = w = \vartheta = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0\,,$$

für ein gelenkig gelagertes Ende mit verhinderter Torsion (Gabellagerung)

$$v = w = \vartheta = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

und für ein freies Ende

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0\,,\\ EJ_y\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x}(M\vartheta) &= 0\,,\\ GJ_d\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + M\frac{\partial w}{\partial x} &= 0\,. \end{aligned}\right\}$$

Damit sind die den allgemeinen Beziehungen (25), (26) entsprechenden Bestimmungsgleichungen für die Nachbarbewegungen zu dem betrachteten Grundbiegezustand aufgestellt. Von diesen Gleichungen liefert offenbar (34) zusammen mit den Randbedingungen für v einfache, freie Biegeschwingungen in y-Richtung, die von den übrigen Bewegungen unabhängig und deshalb uninteressant sind. Das System (35) dagegen beschreibt eine mit einer Torsion gekoppelte Biegebewegung des Stabes in z-Richtung, also eine Kippbewegung, auf die es allein ankommt.

Die Aufstellung der Stabilitätsgleichungen ist nun auch in einem praktischen Beispiel vorgeführt. Es mag zum Schluß noch der Hinweis folgen, daß sich gewisse verwandte Gleichungen schon in der Literatur vorfinden.

Nehmen wir den statischen Fall der zeitunabhängigen Lasten an, so wird $M = M(x)$ eine Funktion von x allein, und die (aus (14) folgenden) Gleichungen für das statische Kippen erhalten eine Form, die aus (35) einfach durch Nullsetzen der Beschleunigungsglieder hervorgeht. Man erkennt in ihr leicht die ursprünglich von *Prandtl*[1] und *Mitchell*[2] aufgestellten und auch von *Trefftz* a. a. O. für den Fall des Kragträgers gegebenen Differentialgleichungen wieder.

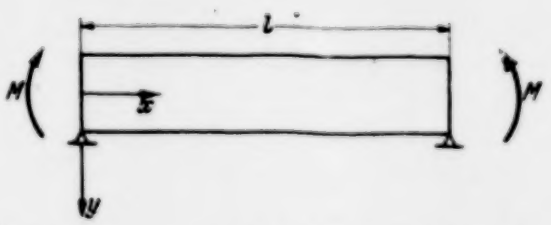


Abb. 3. Belastung des Balkens im speziellen Beispiel.

Ferner gelangen wir zu einem von *Woinowsky-Krieger*[3] behandelten kinetischen Sonderfall, wenn wir folgende beiden speziellen Annahmen einführen:

1. Der Träger sei an beiden Enden in Gabeln gelagert.
2. Die äußere Belastung bestehe in schwingenden Endmomenten (Abb. 3)

$$M = M_0 + M_1\cos\omega t$$

[1] *L. Prandtl*, Kipperscheinungen. Diss. München 1899.
[2] *A. G. M. Mitchell*, Phil. Mag. (5). Bd. 48 (1899), S. 298.
[3] *S. Woinowsky-Krieger*, Ing.-Arch. 13 (1942), S. 197.

mit konstanten Koeffizienten M_0 und M_1, wobei die Frequenz ω stets weit unter der kleinsten Biegeeigenfrequenz des Stabes in y-Richtung $\omega_0 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ_z}{\mu}}$ liegen soll. Dann ist das Grundbiegemoment über die ganze Stablänge näherungsweise gleich M zu setzen.

Gleichung (35) stimmt jetzt mit den von *Woinowsky-Krieger* aufgestellten Kippschwingungsdifferentialgleichungen überein (a. a. O. Gl. (5)), wenn man diese Gleichungen ihrerseits durch Nullsetzen der Größen P und D spezialisiert[1]. *Woinowsky-Krieger* diskutiert die Integrationstheorie seiner Gleichungen ausführlich. Da sich unsere Gleichungen dieser Theorie unterordnen, können wir in allen Einzelheiten auf die angeführte Arbeit verweisen. Lediglich das grundsätzliche Ergebnis sei mitgeteilt: Der Träger führt Kippschwingungen, d. h. kombinierte Dreh- und Biegeschwingungen in z-Richtung aus, sobald diese Bewegung durch eine entsprechende Störung der Grundbewegung eingeleitet wird. Für bestimmte Werte der Momente M_0 und M_1 und der Frequenz ω schaukeln sich diese Schwingungen auf, derart, daß die Beträge von w und ϑ trotz beliebig kleiner Anfangsauslenkungen und -geschwindigkeiten mit der Zeit jede vorgegebene Schranke überschreiten. Die Bedingungen für das Eintreten dieser Aufschaukelung lassen sich zahlenmäßig angeben. Damit ist für das betrachtete spezielle Beispiel in der Tat eine kinetische Instabilität des Grundzustandes nachweisbar.

6. Zusammenfassende Schlußbemerkungen. Die vorliegende Arbeit stellt neben die bekannte Theorie der Stabilität des elastischen Gleichgewichts eine Theorie der Stabilität der elastischen Bewegung. Diese Theorie erscheint dabei als die übergeordnete, die statische Stabilität als ein Sonderfall der kinetischen (in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß das statische Gleichgewicht ein Sonderfall der Bewegung ist). Gemäß dieser inneren Verwandtschaft erfahren die beiden dem ersten Augenschein nach so verschiedenen Probleme eine völlig parallele Behandlung und führen deshalb auch auf ganz entsprechende Endformen für die Stabilitätsgleichungen. Der mathematische Grundgedanke der Untersuchung ist einfach und in der Mechanik von alters her bekannt: Neben den auf seine Stabilität zu untersuchenden Grundzustand des elastischen Körpers wird ein gestörter Zustand, ein Nachbarzustand gestellt, dessen Eigenschaften Auskunft über die Stabilität des Grundzustandes geben sollen. Dabei werden die Verschiebungen vom Grund- zum Nachbarzustand als unabhängige Variable eingeführt und so klein angenommen, daß die Gleichungen für diese Zusatzverschiebungen in der üblichen Weise linearisiert werden dürfen. Daß wir bei diesen Ableitungen den Weg über die Variationsprinzipe der Elastomechanik genommen haben, ist neben dem genannten Grundgedanken von untergeordneter Bedeutung. Prinzipiell wesentlich aber ist, daß den Ausgangspunkt der ganzen Untersuchung die Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen mit ihren nichtlinearen Gleichungen bilden muß, während die von vornherein linearisierte klassische Theorie bekanntlich keinerlei Instabilitätserscheinungen elastischer Körper sichtbar werden läßt.

Das Stabilitätsproblem ist indes mit der Aufstellung unserer Gleichungen erst gestellt, nicht gelöst. Die schwierigere Aufgabe der Aufklärung des tatsächlichen Stabilitätsverhaltens der elastischen Körper ist nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit und harrt jedenfalls für die elastische Bewegung noch weitgehend ihrer Erledigung. Zwar findet man im Schrifttum einige Einzelprobleme behandelt, die in der Einleitung aufgezählt sind. Doch scheint mir auf diesem Gebiet der Elastokinetik noch viel zu tun übrig zu sein.

(Eingegangen am 14. Januar 1947.)

[1] *Woinowsky-Krieger* behandelt einen Träger mit I-Querschnitt, der außer durch Endmomente noch durch eine Längskraft beansprucht wird. Um auf unsern Fall zu kommen, muß man die Biegesteifigkeit D der Flansche und die Längskraft P weglassen.